DEVOIR SURVEILLÉ

Probabilités conditionnelles

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (6 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants. Tout arbre pondéré doit être complété avant d'être exploité.

Exercice 1 — Vrai / Faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors ils sont indépendants.
2. On a toujours $P_A(B) = P_B(A)$.
3. Si $P_A(B) = P(B)$, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
4. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités portées par toutes les branches du second niveau vaut 1.

Exercice 2 — Contrôle qualité (6 points)

Une chaîne de production comporte deux lignes. La ligne A fabrique 70 % des articles, la ligne B le reste. On constate que 2 % des articles de la ligne A et 6 % de ceux de la ligne B présentent un défaut. On prélève un article au hasard. On note A « l'article vient de la ligne A », B « il vient de la ligne B » et D « il est défectueux ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré complet.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.
3. En déduire $P(D)$.
4. L'article prélevé est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la ligne B. Comparer à $P(B)$ et commenter.
5. Calculer la probabilité que l'article soit sans défaut sachant qu'il vient de la ligne A.

Exercice 3 — Deux tirages sans remise (5 points)

Une urne contient 6 jetons bleus et 4 jetons jaunes. On tire successivement et sans remise deux jetons.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons bleus.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes.
3. Calculer la probabilité que le second jeton soit bleu.
4. Comparer ce dernier résultat à la probabilité que le *premier* jeton soit bleu. Le résultat est-il surprenant ?

Exercice 4 — Indépendance (5 points)

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}72$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier par un calcul.
3. Calculer $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$, puis commenter.
4. Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ de deux façons différentes.