Première Spécialité

Probabilités conditionnelles et indépendance

Fiche d'exercices

Les résultats seront donnés sous forme exacte ou arrondis au millième. Pour un événement A, on note $\overline{A}$ son événement contraire.

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : lire un tableau d'effectifs ⋆

Un club de loisirs compte 120 adhérents ; chacun pratique une seule activité. On choisit un adhérent au hasard et on note M : « l'adhérent a moins de 18 ans », N : « il pratique la natation », D : « il pratique la danse » et E : « il pratique l'escalade ».

	Natation (N)	Danse (D)	Escalade (E)	Total
Moins de 18 ans (M)	20	25	15	60
18 ans ou plus ($\overline{M}$)	30	10	20	60
Total	50	35	35	120

a. Calculer $p(M)$, $p(D)$ et $p(M \cap D)$.

b. Calculer $p_M(D)$ et $p_D(M)$. Traduire chacun de ces résultats par une phrase.

c. Un adhérent majeur est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il pratique l'escalade ? Calculer aussi $p_E(\overline{M})$.

d. Calculer $p(N \cup M)$.

Exercice 2 : lire un arbre pondéré ⋆

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

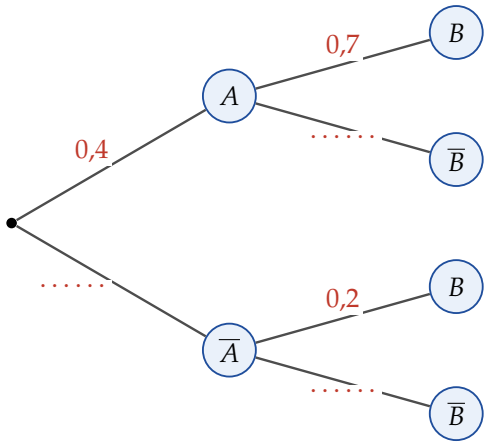
a. Compléter les probabilités manquantes.

b. Donner $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.

c. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(\overline{A} \cap B)$.

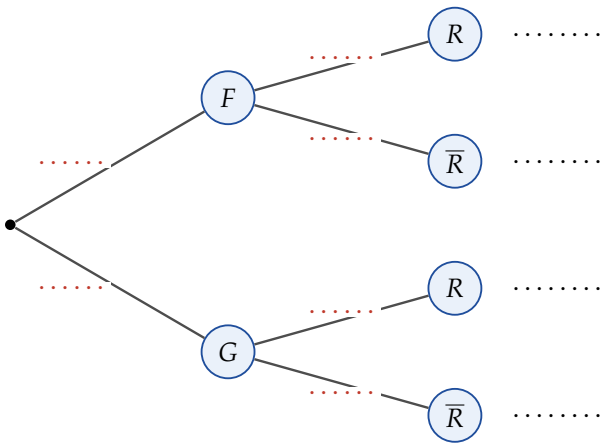
d. En déduire $p(B)$, puis $p_B(A)$.

e. Calculer $p_{\overline{B}}(\overline{A})$.



Exercice 3 : construire un arbre ⋆

Dans une classe de première, 55 % des élèves sont des filles. 80 % des filles et 60 % des garçons ont obtenu la moyenne au dernier devoir. On choisit un élève au hasard : F : « c'est une fille », G : « c'est un garçon », R : « il a obtenu la moyenne ».



a. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Calculer $p(F \cap R)$ et $p(R)$.

c. L'élève a obtenu la moyenne. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

d. Calculer $p_{\overline{R}}(G)$.

Exercice 4 : traduire un énoncé ⋆⋆

On choisit au hasard un inscrit d'une médiathèque. On note A : « l'inscrit est un adulte » et B : « l'inscrit emprunte des bandes dessinées ». Traduire chaque phrase par une égalité utilisant les notations du type $p(X)$, $p_X(Y)$ ou $p(X \cap Y)$:

(1) « 60 % des inscrits sont des adultes. »

(2) « Parmi les adultes, 25 % empruntent des bandes dessinées. »

(3) « 45 % des inscrits empruntent des bandes dessinées. »

(4) « 30 % des inscrits sont des jeunes qui empruntent des bandes dessinées. »

a. Calculer $p(A \cap B)$ et vérifier la cohérence des données (2), (3) et (4).

b. Quelle est la proportion d'emprunteurs de bandes dessinées parmi les jeunes ?

c. Un inscrit emprunte des bandes dessinées. Quelle est la probabilité que ce soit un adulte ?

Exercice 5 : indépendants ou incompatibles ? ⋆⋆

On lance un dé équilibré à six faces et on considère les événements :
A : « le résultat est pair », B : « le résultat est un multiple de 3 », C : « le résultat est supérieur ou égal à 4 », D : « le résultat est 1 ou 3 ».

a. Compléter le tableau en cochant les issues qui réalisent chaque événement.

Issue	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						

b. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et A et C ?

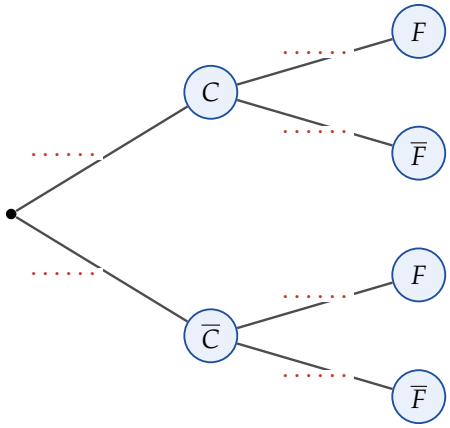
c. Les événements A et D sont-ils incompatibles ? indépendants ?

d. Les événements B et D sont-ils indépendants ?

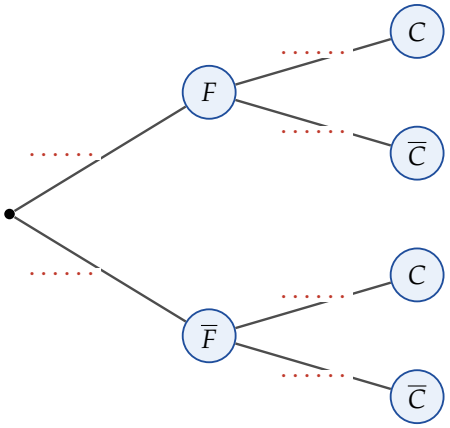
Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 6 : de l'arbre au tableau, puis à l'arbre inversé ⋆⋆

Dans un supermarché, 70 % des clients paient par carte bancaire (C), les autres en espèces. 40 % des clients qui paient par carte possèdent la carte de fidélité du magasin (F), contre 20 % des clients qui paient en espèces.



Arbre 1



Arbre 2 (arbre « inversé »)

a. Compléter l'arbre 1.

b. Compléter le tableau de probabilités ci-dessous.

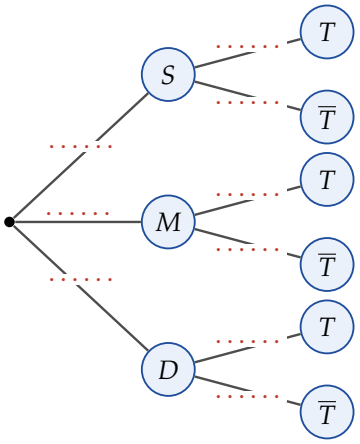
	F	$\overline{F}$	Total
Carte (C)			
Espèces ($\overline{C}$)			
Total			1

c. En déduire l'arbre 2, qui commence par la possession de la carte de fidélité.

d. Un client possède la carte de fidélité. Quelle est la probabilité qu'il paie par carte bancaire ?

Exercice 7 : une partition en trois ⋆⋆

Les abonnés d'une plateforme de vidéo à la demande regardent principalement des séries (S) pour 50 % d'entre eux, des films (M) pour 30 %, des documentaires (D) pour les autres. Ils regardent surtout sur leur téléphone (T) dans 60 % des cas pour les amateurs de séries, 40 % pour les amateurs de films et 25 % pour les amateurs de documentaires.



a. Construire un arbre pondéré complet.

b. Calculer la probabilité qu'un abonné choisi au hasard regarde surtout sur son téléphone.

c. Calculer $p_T(S)$ et $p_T(D)$.

d. Calculer $p_{\overline{T}}(D)$.

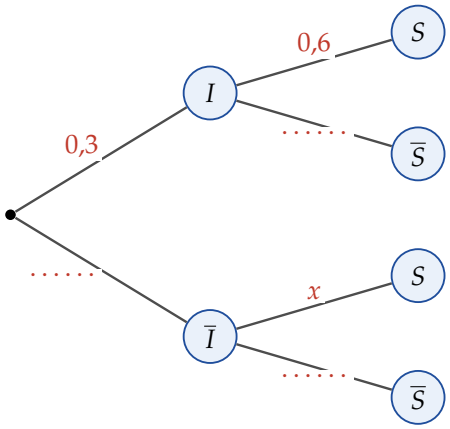
Exercice 8 : retrouver une probabilité manquante ⋆⋆

Dans un lycée, 30 % des élèves sont internes (I). 60 % des internes pratiquent une activité sportive (S) au lycée. Au total, 39 % des élèves du lycée pratiquent une activité sportive. On note $x = p_{\overline{I}}(S)$.

a. Compléter l'arbre ci-contre en fonction de x.

b. Exprimer $p(S)$ en fonction de x, puis déterminer x.

c. Un élève pratique une activité sportive. Quelle est la probabilité qu'il soit interne ?



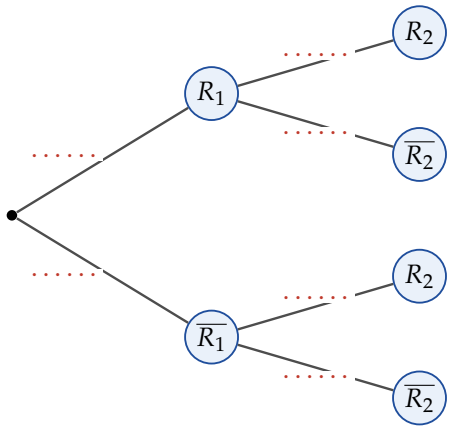
Exercice 9 : deux épreuves indépendantes ⋆⋆

Un basketteur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. Les lancers sont indépendants les uns des autres. Il tire deux lancers francs ; on note R_1 et R_2 les événements « le premier (resp. le deuxième) lancer est réussi ».

a. Compléter l'arbre ci-contre.

b. Calculer la probabilité qu'il réussisse les deux lancers ; aucun lancer ; exactement un lancer.

c. Il tire maintenant trois lancers francs. Calculer la probabilité qu'il réussisse les trois, puis qu'il en réussisse au moins un.



Exercice 10 : indépendance dans un sondage ⋆⋆

Un institut interroge 1 000 personnes. On note J : « la personne a moins de 35 ans », A : « elle possède un abonnement de musique en ligne » et P : « elle lit la presse papier ».

	A	$\overline{A}$	Total
J	240	160	400
$\overline{J}$	360	240	600
Total	600	400	1 000

Tableau 1

	P	$\overline{P}$	Total
J	40	360	400
$\overline{J}$	210	390	600
Total	250	750	1 000

Tableau 2

a. À l'aide du tableau 1, montrer que J et A sont indépendants. Vérifier que $p_J(A) = p_{\overline{J}}(A)$ et interpréter.

b. À l'aide du tableau 2, les événements J et P sont-ils indépendants ? Comparer $p_J(P)$ et $p_{\overline{J}}(P)$.

c. Sans calcul, que peut-on dire des événements $\overline{J}$ et $\overline{A}$?

Série C ⋆⋆⋆ Applications

Exercice 11 : le paradoxe du dépistage ⋆⋆

Une maladie touche 1 % de la population. Un test de dépistage est positif pour 99 % des personnes malades et négatif pour 98 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard ; M : « elle est malade », T : « son test est positif ».

a. On imagine une ville de 10 000 habitants. Compléter le tableau d'effectifs.

	Test positif (T)	Test négatif ($\overline{T}$)	Total
Malades (M)			
Sains ($\overline{M}$)			
Total			10 000

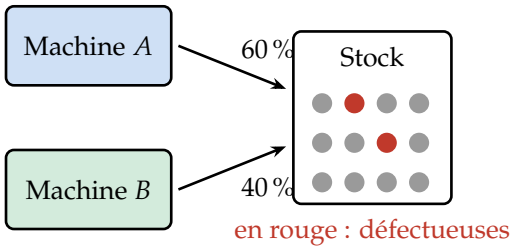
b. En déduire $p(T)$, puis la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade. Ce résultat vous surprend-il ? Expliquer.

c. Retrouver ces résultats à l'aide d'un arbre pondéré.

d. Calculer la probabilité qu'une personne dont le test est négatif soit saine.

Exercice 12 : contrôle qualité ⋆⋆

Un atelier fabrique des pièces avec deux machines : la machine A produit 60 % des pièces et la machine B le reste. 3 % des pièces de la machine A et 5 % des pièces de la machine B sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard ; D : « elle est défectueuse ».



a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D)$.

c. Le responsable affirme : « la plupart des pièces défectueuses viennent de la machine B ». A-t-il raison ?

d. Une pièce n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine A ?

Exercice 13 : l'application météo ⋆⋆⋆

Dans une ville, il pleut 20 % des jours. La veille d'un jour de pluie, une application météo annonce de la pluie dans 90 % des cas ; la veille d'un jour sans pluie, elle annonce (à tort) de la pluie dans 15 % des cas. On choisit un jour au hasard ; P : « il pleut ce jour-là », A : « la veille, l'application a annoncé de la pluie ».

a. Construire un arbre pondéré et calculer $p(A)$.

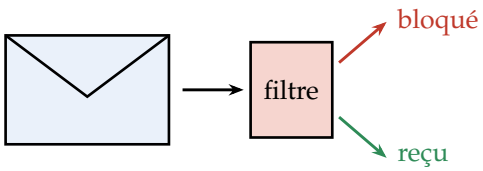
b. L'application annonce de la pluie pour demain. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

c. L'application n'annonce pas de pluie. Quelle est la probabilité qu'il ne pleuve pas ?

d. Calculer la probabilité que l'application se trompe. Sur une année de 365 jours, combien d'erreurs environ peut-on attendre ?

Exercice 14 : le filtre anti-spam ⋆⋆⋆

Une messagerie reçoit des courriels dont 40 % sont des spams (S). Son filtre bloque (B) 95 % des spams, mais aussi 2 % des courriels normaux.



a. Construire un arbre pondéré et calculer $p(B)$.

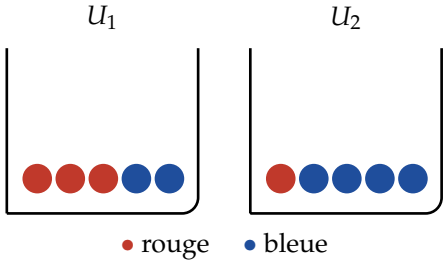
b. Un courriel est bloqué. Quelle est la probabilité que ce soit un courriel normal ?

c. Un courriel arrive dans la boîte de réception (il n'est pas bloqué). Quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

d. Sur 1 000 courriels reçus, combien de courriels normaux sont bloqués par erreur, en moyenne ?

Exercice 15 : une pièce et deux urnes ⋆⋆⋆

On lance une pièce équilibrée. Si on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne U_1 (3 rouges, 2 bleues) ; sinon, on tire une boule dans l'urne U_2 (1 rouge, 4 bleues). On note R : « la boule tirée est rouge ».



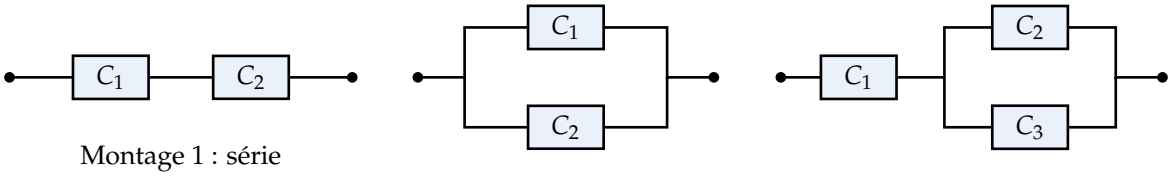
a. Construire un arbre pondéré et montrer que $p(R) = 0{,}4$.

b. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu Pile ?

c. On remplace l'urne U_2 par une urne contenant n boules rouges et $5 - n$ bleues ($0 \leqslant n \leqslant 5$). Exprimer $p(R)$ en fonction de n, puis déterminer n pour que $p(R) = 0{,}5$.

Exercice 16 : fiabilité d'un circuit ⋆⋆⋆

Un appareil électronique contient des composants qui fonctionnent indépendamment les uns des autres. Le composant C_1 fonctionne avec la probabilité 0,9 ; les composants C_2 et C_3 fonctionnent chacun avec la probabilité 0,8. Le courant passe dans un montage **en série** si tous les composants fonctionnent, et dans un montage **en parallèle** si au moins un composant fonctionne.



Montage 1 : série — Montage 2 : parallèle — Montage 3 : mixte

a. Calculer la probabilité que le courant passe dans le montage 1.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des deux composants du montage 2 ne fonctionne. En déduire la probabilité que le courant passe dans le montage 2.

c. Calculer la probabilité que le courant passe dans le montage 3. Quel montage est le plus fiable ?

Série D ⋆⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 17 : tirages sans remise ⋆⋆⋆

Un sac contient 10 jetons : 3 jetons gagnants (G) et 7 jetons perdants. On tire successivement, **sans remise**, deux jetons. On note G_1 et G_2 les événements « le premier (resp. le deuxième) jeton est gagnant ».

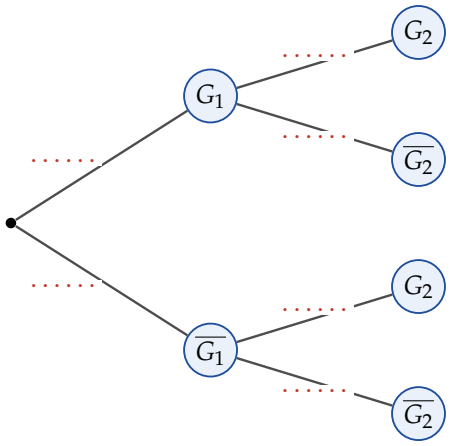
a. Compléter l'arbre ci-contre (avec des fractions).

b. Calculer la probabilité de tirer deux jetons gagnants, puis exactement un jeton gagnant.

c. Calculer $p(G_2)$. Comparer avec $p(G_1)$: que remarque-t-on ?

d. Calculer $p_{G_2}(G_1)$. Les événements G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?

e. Reprendre les questions b. et c. pour des tirages **avec remise**.



Exercice 18 : le service au tennis ⋆⋆⋆

Au tennis, le joueur qui sert dispose de deux essais. Hugo réussit sa première balle de service dans 60 % des cas ; il gagne alors le point dans 75 % des cas. S'il manque sa première balle, il joue une seconde balle, plus prudente, qu'il réussit dans 90 % des cas ; il gagne alors le point dans 55 % des cas. S'il manque aussi la seconde balle (« double faute »), il perd le point.

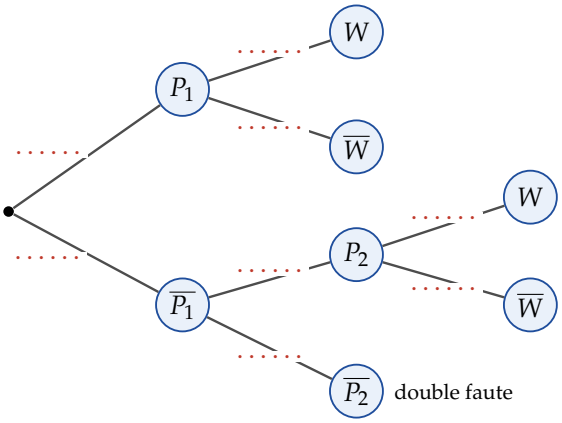
a. Compléter l'arbre ci-contre (P_1 : « la 1re balle est réussie », P_2 : « la 2de balle est réussie », W : « Hugo gagne le point »).

b. Calculer la probabilité d'une double faute.

c. Montrer que la probabilité qu'Hugo gagne le point est 0,648.

d. Hugo a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi sa première balle ?

e. Son entraîneur lui propose de jouer la seconde balle comme la première (réussie à 60 %, point gagné à 75 %). Est-ce une bonne idée ?



Exercice 19 : le témoin et les taxis ⋆⋆⋆⋆

Dans une ville, 85 % des taxis sont verts et 15 % sont bleus. Une nuit, un taxi est impliqué dans un accrochage. Un témoin affirme que le taxi était bleu. Des tests montrent que, dans les conditions de cette nuit-là, ce témoin identifie correctement la couleur d'un taxi dans 80 % des cas (qu'il soit vert ou bleu). On note B : « le taxi est bleu » et T : « le témoin dit que le taxi est bleu ».

a. Construire un arbre pondéré et calculer $p(T)$.

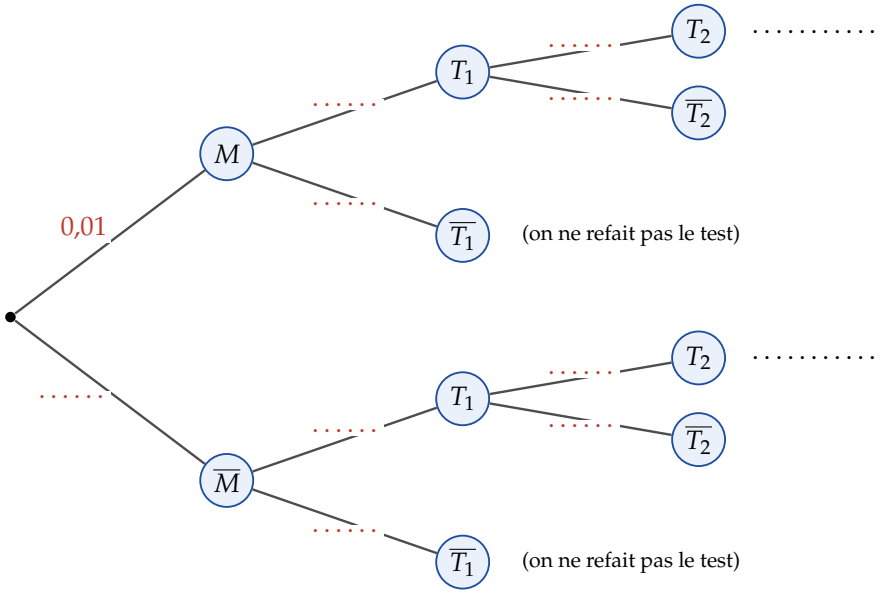
b. Calculer $p_T(B)$. Le taxi était-il plus probablement bleu ou vert ? Commenter.

c. Un second témoin, indépendant du premier et aussi fiable, affirme lui aussi que le taxi était bleu. Calculer la probabilité que le taxi soit bleu sachant que les deux témoins le disent bleu.

Exercice 20 : un second test et une simulation ⋆⋆⋆⋆

On reprend la situation de l'exercice 11 (maladie touchant 1 % de la population, test positif pour 99 % des malades et pour 2 % des personnes saines).

a. Une personne dont le test est positif passe un second test, dont le résultat est indépendant du premier sachant l'état de la personne. On a commencé l'arbre ci-dessous (M, puis T_1, puis T_2) : le compléter, puis calculer la probabilité qu'une personne dont les deux tests sont positifs soit malade.



Python

```
from random import random

def simulation(n):
    positifs = 0
    malades_positifs = 0
    for k in range(n):
        malade = random() < 0.01
        if malade:
            positif = random() < 0.99
        else:
            positif = random() < 0.02
        if positif:
            positifs = positifs + 1
            if malade:
                malades_positifs = malades_positifs + 1
    return malades_positifs / positifs
```

b. On rappelle que `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0\,;1[$. Expliquer pourquoi l'instruction `malade = random() < 0.01` simule le fait qu'une personne soit malade ou non.

c. Que représentent les variables `positifs` et `malades_positifs` ?

d. De quelle probabilité la valeur renvoyée par `simulation(100000)` est-elle une estimation ? Quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir ?

e. Modifier le programme pour simuler le double test de la question a.