Première Spécialité

Dérivation

Cours

I. Nombre dérivé

1. Taux de variation et sécantes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe, a un réel de I et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$.
On considère les points $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $B\big(a+h\,;f(a+h)\big)$ de $\mathcal{C}_f$. Le coefficient directeur de la **sécante** (AB) est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

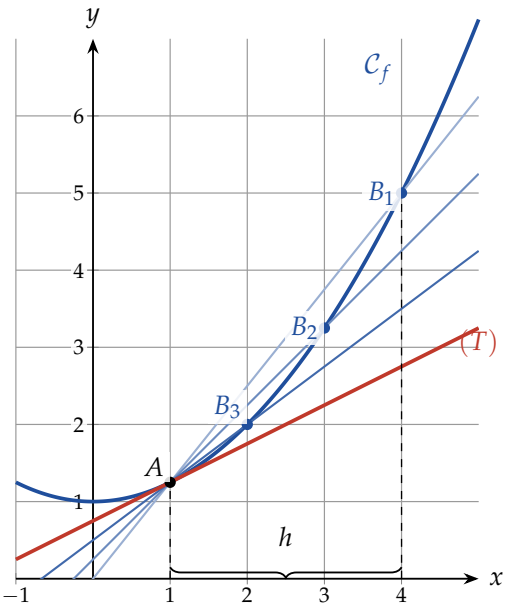
Définition : taux de variation

Le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ est le nombre

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (h \neq 0).$$

C'est le coefficient directeur de la sécante (AB).

Lorsque h se rapproche de 0, le point B glisse sur la courbe vers A et la sécante (AB) « pivote » autour de A vers une position limite : la **tangente** (T) à la courbe en A.



Courbe de $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$, $a = 1$: sécantes (AB_1), (AB_2), (AB_3) pour $h = 3, 2, 1$, et tangente (T) en rouge.

h	3	2	1	0,5	0,1	0,01	$\to 0$
$t(h) = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2+h}{4}$	1,25	1	0,75	0,625	0,525	0,5025	$\to 0{,}5$

2. Nombre dérivé

Définition : nombre dérivé

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux de variation $t(h)$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

La notation $h \to 0$ signifie que h se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre ($h \neq 0$).

Exemple : calcul d'un nombre dérivé

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 3$. Pour $h \neq 0$: $t(h) = \dfrac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6+h$.
Quand h tend vers 0, $6+h$ tend vers 6 : f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Remarques. Pour $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$, le tableau ci-dessus montre que $f'(1) = 0{,}5$: c'est le coefficient directeur de la tangente (T). Les physiciens notent aussi $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

3. Interprétation graphique : la tangente

Définition : tangente

Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a\,;f(a)\big)$ est la droite qui passe par A et dont le **coefficient directeur est** $f'(a)$.

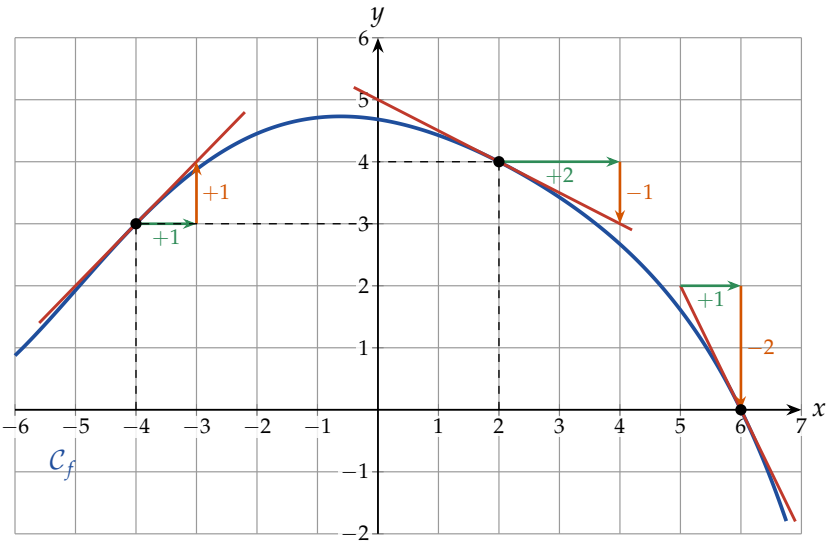
Méthode : lire un nombre dérivé sur un graphique

On lit $f'(a)$ comme le coefficient directeur de la tangente en A : à partir de A, on se déplace **horizontalement** d'un certain nombre d'unités, puis on lit le déplacement **vertical** nécessaire pour revenir sur la tangente :

$$f'(a) = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}.$$

Une tangente qui « monte » donne $f'(a) > 0$, une tangente qui « descend » donne $f'(a) < 0$, une tangente **horizontale** donne $f'(a) = 0$.

Exemple 1 : lecture graphique



La courbe $\mathcal{C}_f$ admet en chacun des points marqués une tangente, tracée en rouge.

$f(-4) = 3$ et $f'(-4) = \dfrac{+1}{+1} = 1.$

$f(2) = 4$ et $f'(2) = \dfrac{-1}{+2} = -\dfrac{1}{2}.$

$f(6) = 0$ et $f'(6) = \dfrac{-2}{+1} = -2.$

Attention : $f(a)$ se lit sur l'axe des ordonnées, $f'(a)$ se lit avec la pente de la tangente.

Exemple 2 : tangente horizontale

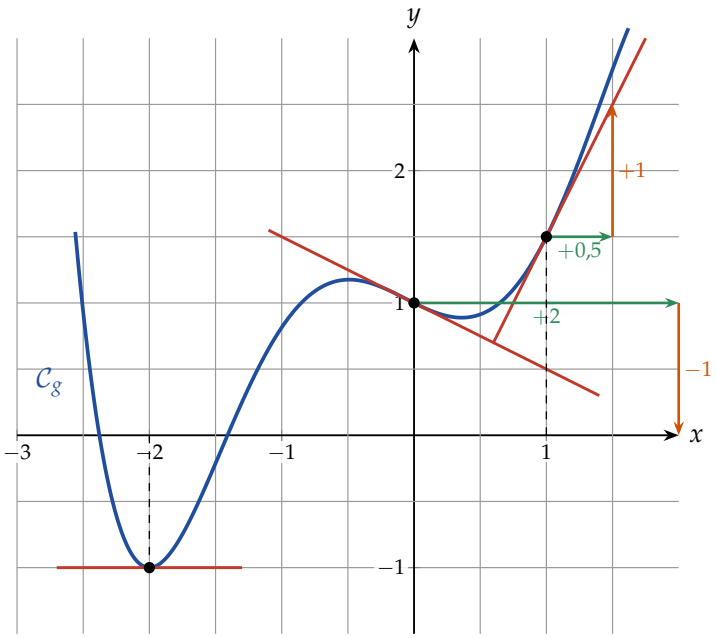
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet une tangente en chacun des points marqués (le quadrillage est ici de 0,5 unité).

$g(-2) = -1$ et $g'(-2) = 0$: la tangente est **horizontale**.

$g(0) = 1$ et $g'(0) = \dfrac{-1}{+2} = -\dfrac{1}{2}.$

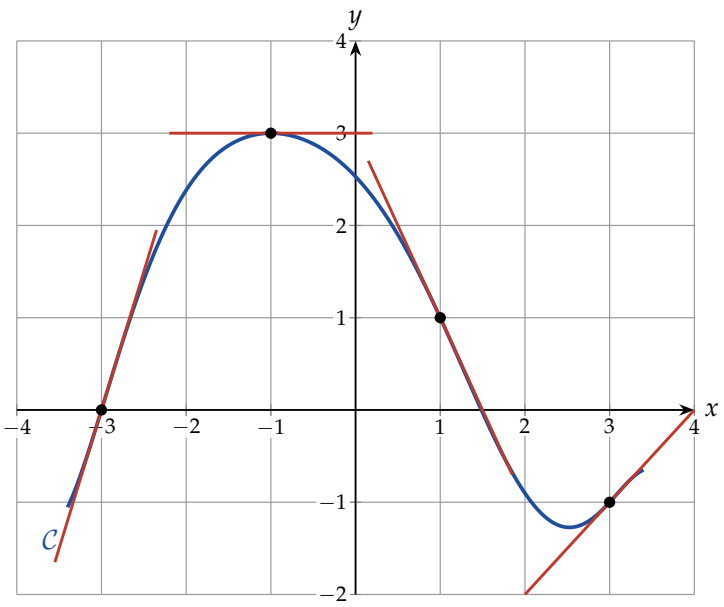
$g(1) = 1{,}5$ et $g'(1) = \dfrac{+1}{+0{,}5} = 2.$

À retenir : plus la tangente est « raide », plus $|f'(a)|$ est grand ; aux « sommets » de la courbe, la tangente est horizontale.



Exercice 1 : lire des nombres dérivés

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente une fonction k ; ses tangentes aux points d'abscisses -3, -1, 1 et 3 sont tracées.



a. Lire les images :

$k(-3) = \ldots\ldots$ $k(-1) = \ldots\ldots$

$k(1) = \ldots\ldots$ $k(3) = \ldots\ldots$

b. Lire les nombres dérivés :

$k'(-3) = \ldots\ldots$ $k'(-1) = \ldots\ldots$

$k'(1) = \ldots\ldots$ $k'(3) = \ldots\ldots$

c. Combien de points de la courbe ont une tangente horizontale ? Donner une valeur approchée de leurs abscisses.

.....

.....

.....

d. Sur quel intervalle les nombres dérivés $k'(x)$ semblent-ils négatifs ?

.....

.....

Exercice 2 : calculer un nombre dérivé avec le taux de variation

a. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Montrer que, pour $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ vaut $h-1$. En déduire $f'(1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

b. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que, pour $h \neq 0$ (et $h \neq -2$), $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h} = \dfrac{-1}{2(2+h)}$. En déduire $g'(2)$.

.....

.....

.....

.....

c. Pour un réel a quelconque, calculer le taux de variation de f entre a et $a+h$, puis $f'(a)$.

.....

.....

.....

.....

II. Tangente à une courbe

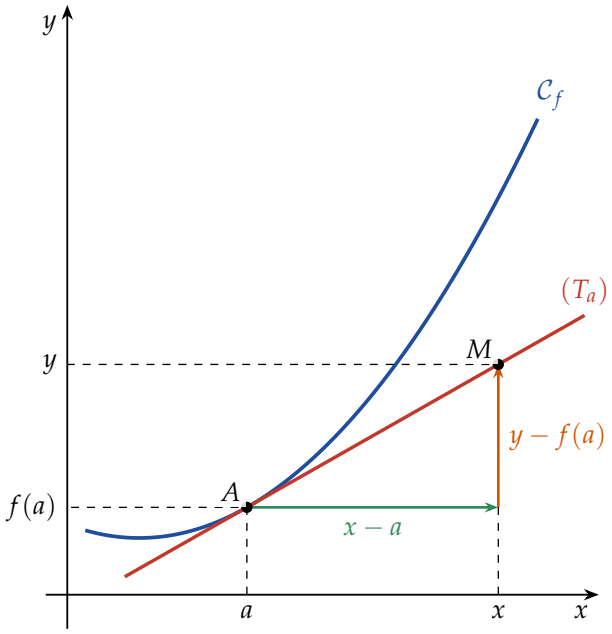
Soit (T_a) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $M(x\,;y)$ un point de (T_a) avec $x \neq a$. Le coefficient directeur de (T_a) est $f'(a)$, donc :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a} \iff y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Théorème : équation de la tangente

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Méthode : déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a

1. Calculer $f'(a)$ et $f(a)$. **2.** Remplacer dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. **3.** Développer et réduire : $y = mx + p$.
Cas particulier : si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale**, d'équation $y = f(a)$.

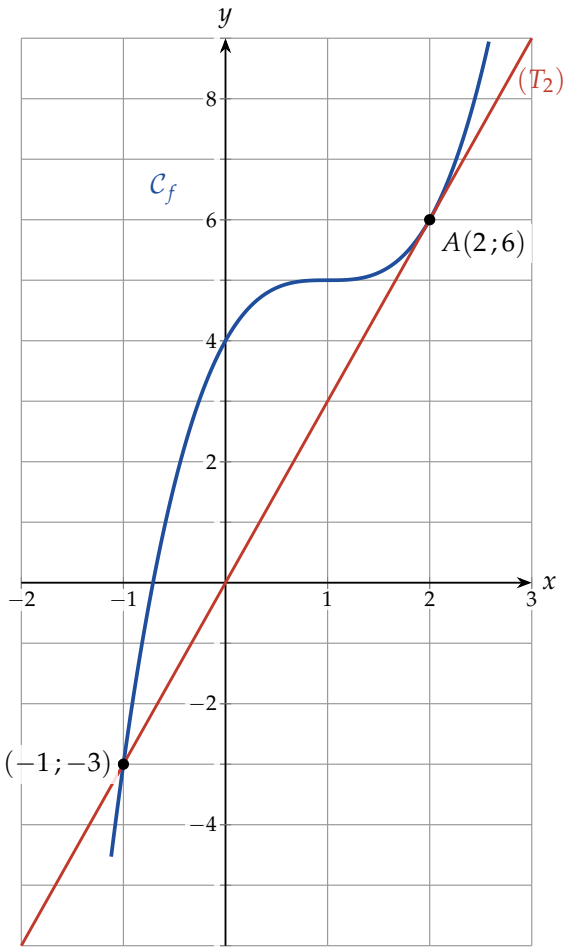
Exemple 1 : déterminer une équation de tangente

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

1. On dérive : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ (voir partie III).
2. On calcule : $f(2) = 8 - 12 + 6 + 4 = 6$ et $f'(2) = 12 - 12 + 3 = 3$.
3. On remplace :
$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 3(x - 2) + 6$, soit

$$(T_2) : y = 3x.$$

Remarque. La tangente peut recouper la courbe ailleurs : ici $f(x) - 3x = (x - 2)^2(x + 1)$, donc (T_2) recoupe $\mathcal{C}_f$ au point $(-1\,;-3)$.



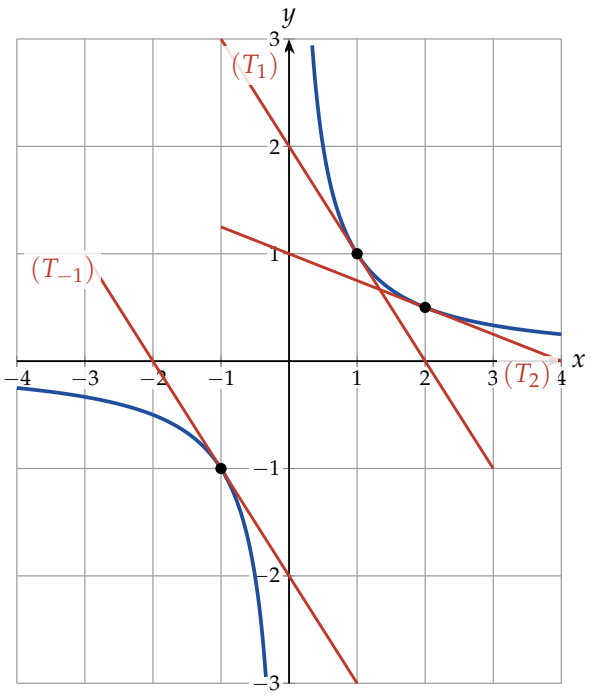
Exemple 2 : tangentes à l'hyperbole

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; on admet que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

• En $a = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$, d'où
$y = -1(x-1) + 1$, soit $(T_1) : y = -x + 2$.

• En $a = 2$: $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$, d'où
$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$, soit $(T_2) : y = -\frac{1}{4}x + 1$.

• En $a = -1$: $f(-1) = -1$ et $f'(-1) = -1$, d'où
$(T_{-1}) : y = -x - 2$, parallèle à (T_1).



Exercice 3 : équations de tangentes

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$, de courbe $\mathcal{C}$ ci-contre. On admet que $f'(a) = 2a - 4$ pour tout réel a.

a. Déterminer une équation de la tangente (T_3) au point d'abscisse 3.

.....

.....

.....

.....

b. Même question aux points d'abscisses 0 et 2.

.....

.....

.....

.....

c. Tracer ces trois tangentes sur le graphique.

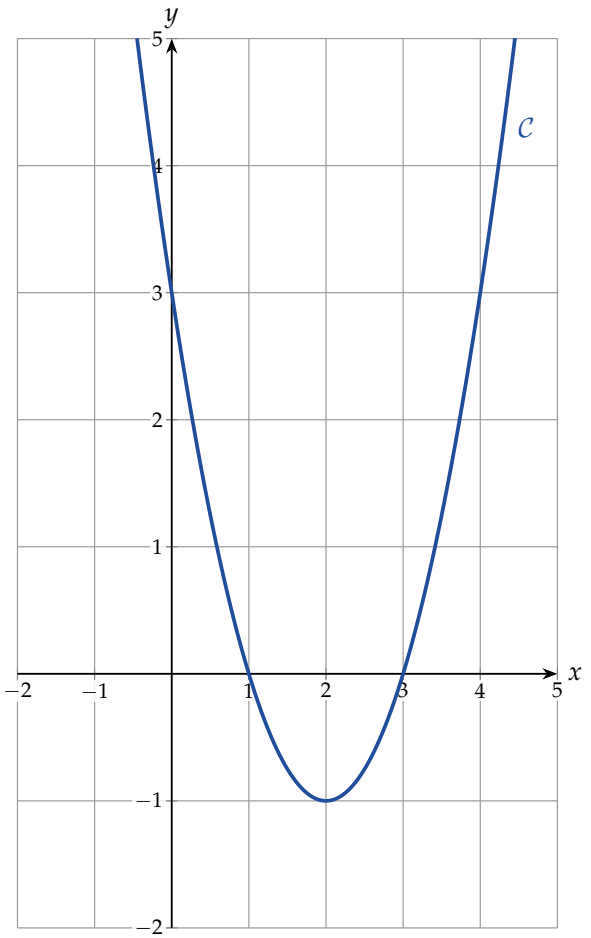
d. En quel point la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$? Donner son équation.

.....

.....

.....

.....

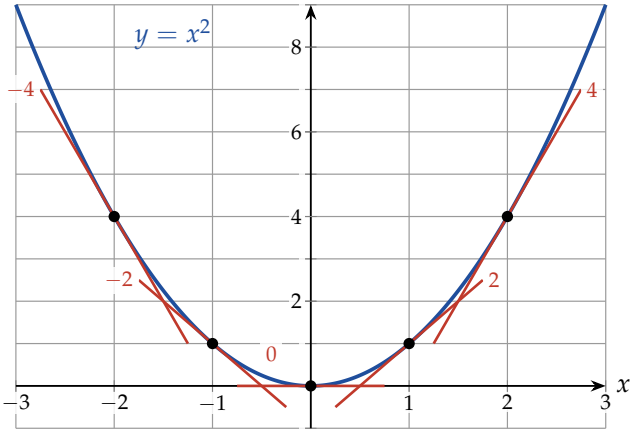


III. Fonction dérivée

1. Définition

Définition : fonction dérivée

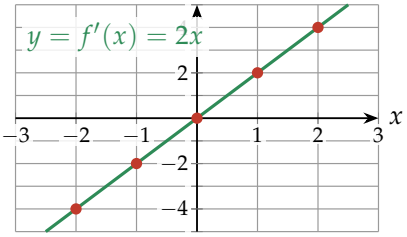
Si f admet un nombre dérivé en tout réel x d'un intervalle I, on dit que f est **dérivable sur** I. La fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée **fonction dérivée** de f.



Tangentes à la parabole $y = x^2$ et leurs coefficients directeurs (en rouge).

Pour la fonction carré, les tangentes aux points d'abscisses $-2, -1, 0, 1, 2$ ont pour coefficients directeurs $-4, -2, 0, 2, 4$: chaque fois le **double** de l'abscisse.

On admet que le nombre dérivé de $x \mapsto x^2$ en tout réel x vaut $2x$: la fonction dérivée de la fonction carré est $f' : x \mapsto 2x$. Les points $\big(a\,;f'(a)\big)$ sont alignés sur la droite $y = 2x$:

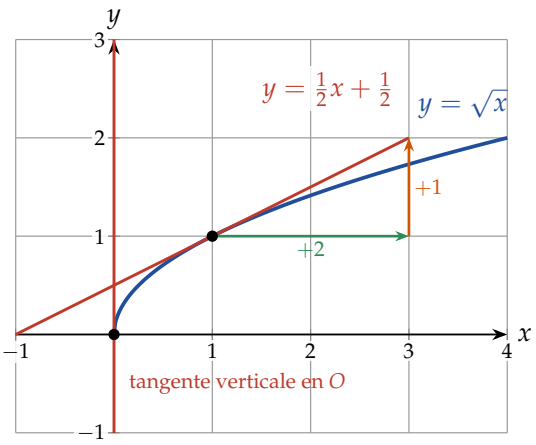


2. Dérivées des fonctions de référence

Fonction f	Définie sur	Dérivée f'	Dérivable sur
$f(x) = k$ (k constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

Exemples.

- Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^4$.
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, alors $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$: la tangente au point $(1\,;1)$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.



Remarque : la racine carrée en 0

La fonction racine carrée est définie en 0 mais **n'est pas dérivable en** 0 : le taux $\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand quand h tend vers 0. Sa courbe admet en O une tangente **verticale** (l'axe des ordonnées), qui n'a pas de coefficient directeur.

3. Opérations sur les fonctions dérivables

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I, et un réel λ.

Propriété : règles de dérivation

Somme	$(u+v)' = u' + v'$	
Produit par un réel	$(\lambda u)' = \lambda\, u'$	
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$	
Inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	si v ne s'annule pas sur I
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	si v ne s'annule pas sur I
Fonction $x \mapsto g(ax+b)$	$\big(g(ax+b)\big)' = a\, g'(ax+b)$	si g est dérivable en $ax+b$

Cas particuliers : $\big((ax+b)^n\big)' = n\,a\,(ax+b)^{n-1}$ et $\left(\sqrt{ax+b}\right)' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ (si $ax+b>0$).

Complément : plus généralement, $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u>0$).

Conséquence : les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sont dérivables sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

Attention

La dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées : $(uv)' \neq u'v'$.

Par exemple, $x^2 = x \times x$ a pour dérivée $2x$, et non $1 \times 1 = 1$. De même, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$.

Exemples : appliquer les règles

Méthode : reconnaître la forme (somme, produit, quotient…), repérer u et v, calculer u' et v', appliquer la formule, puis simplifier le numérateur en **gardant le dénominateur v^2 factorisé**.

$f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (somme) : $\quad f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

$g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$ (somme et λu) : $\quad g'(x) = 5\times 3x^2 + 12 \times 2x - 7 = 15x^2 + 24x - 7$

$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ (produit, $x>0$) : $\quad u = 3x+1,\ v = \sqrt{x}\ ;\ u' = 3,\ v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ (inverse) : $\quad v = x^2+x+1,\ v' = 2x+1\ ;\ f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$ (quotient) : $\quad f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - (2x+5)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$

$f(x) = (3x-5)^5$ ($g(ax+b)$ avec $g(X) = X^5$) : $\quad f'(x) = 3 \times 5(3x-5)^4 = 15(3x-5)^4$

$f(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$: $\quad f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

$g(x) = \sqrt{x^2+1}$ (complément $\sqrt{u}$) : $\quad g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 4 : calculer des fonctions dérivées

Pour chaque fonction, préciser la règle utilisée puis calculer la dérivée (on simplifiera le résultat).

a. $f_1(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f_1'(x) =$ .....

b. $f_2(x) = \dfrac{4}{x} + 3\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ $\quad f_2'(x) =$ .....

c. $f_3(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

.....

.....

.....

d. $f_4(x) = (x^2+1)(3-x)$ sur $\mathbb{R}$

.....

.....

e. $f_5(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$

.....

.....

.....

f. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f_6'(x) =$ .....

g. $f_7(x) = (3x-2)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f_7'(x) =$ .....

h. $f_8(x) = \sqrt{2x+6}$ sur $]-3\,;+\infty[$ $\quad f_8'(x) =$ .....

4. Une application : la vitesse instantanée

Si $x(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t (loi horaire), sa **vitesse instantanée** est $v(t) = x'(t)$ et son **accélération** est $a(t) = v'(t)$. C'est en étudiant la vitesse instantanée que Newton a inventé la dérivée.

Exemple : deux mobiles sur un axe

Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent sur un axe selon les lois horaires $x_1(t) = 2t^2 + t + 4$ et $x_2(t) = -t^2 + 5t + 8$ (t en s, x en m).

• Positions initiales : $x_1(0) = 4$ et $x_2(0) = 8$.

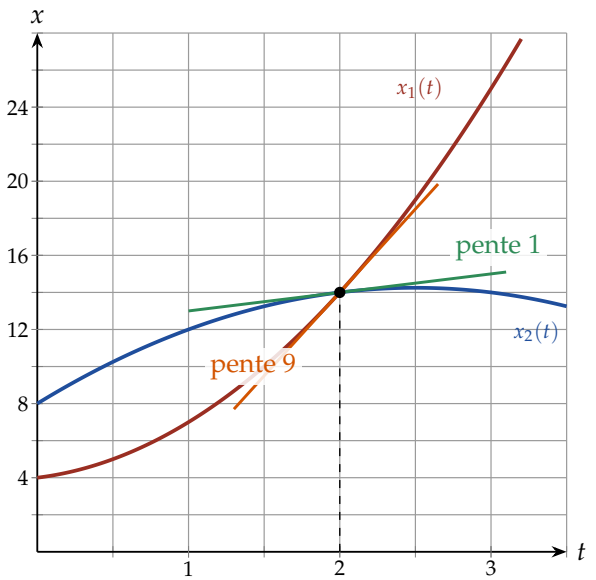
• Vitesses : $v_1(t) = 4t + 1$ et $v_2(t) = -2t + 5$, donc $v_1(0) = 1$ et $v_2(0) = 5$.

• Rencontre : $x_1(t) = x_2(t) \iff 3t^2 - 4t - 4 = 0$; $\Delta = 64$, la solution positive est $t_0 = 2$ et la position commune est $x_1(2) = 14$.

• À cet instant $v_1(2) = 9 > v_2(2) = 1 > 0$: M_1 double M_2.

• $v_2(t) = 0$ pour $t = 2{,}5$: M_2 fait alors demi-tour.

Les accélérations $a_1 = 4$ et $a_2 = -2$ sont constantes.



Les vitesses à $t = 2$ sont les coefficients directeurs des tangentes aux courbes des lois horaires.

Exercice 5 : la hauteur d'un ballon

Un ballon est lancé verticalement. Sa hauteur (en m) à l'instant t (en s) est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$.

a. De quelle hauteur le ballon est-il lancé ?

.....

b. Calculer la vitesse $v(t) = h'(t)$, puis $v(0)$, $v(1)$ et $v(3)$. Que signifie le signe de $v(3)$?

.....

.....

.....

c. À quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ? Que dire de la tangente en ce point ?

.....

.....

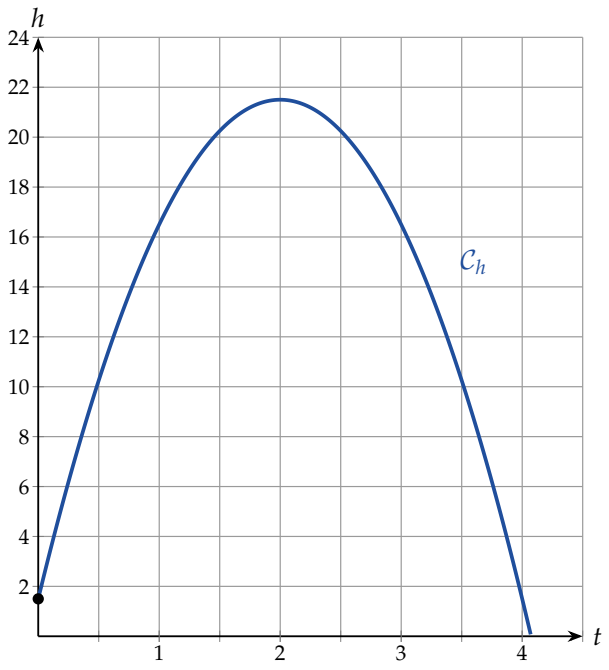
d. Tracer la tangente au point d'abscisse 1 et donner son équation.

.....

e. Au bout de combien de temps le ballon touche-t-il le sol ? Quelle est alors sa vitesse ?

.....

.....



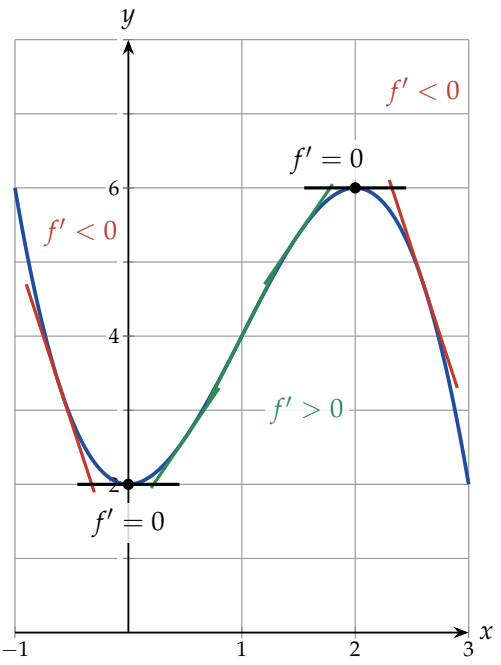
IV. Dérivation et sens de variation

1. Signe de la dérivée et variations

Théorème : variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est **constante** sur I.
- Si $f'(x) > 0$ sur I (sauf éventuellement en des points isolés où f' s'annule), alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I (sauf éventuellement en des points isolés où f' s'annule), alors f est **strictement décroissante** sur I.

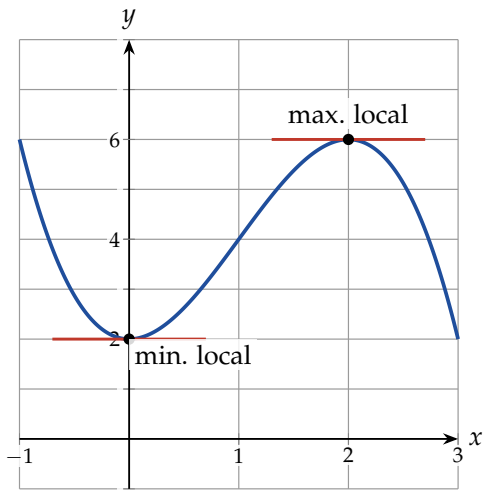


Pentes des tangentes positives là où la courbe monte, négatives là où elle descend, **nulles** aux sommets.

Exemple : étudier les variations de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$

1. On dérive : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$.
2. On cherche les zéros : $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
3. On étudie le signe (f' est un trinôme de coefficient $-3 < 0$: négatif à l'extérieur des racines) et on calcule $f(0) = 2$ et $f(2) = 6$.
4. On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		2	$\nearrow$	6	$\searrow$	



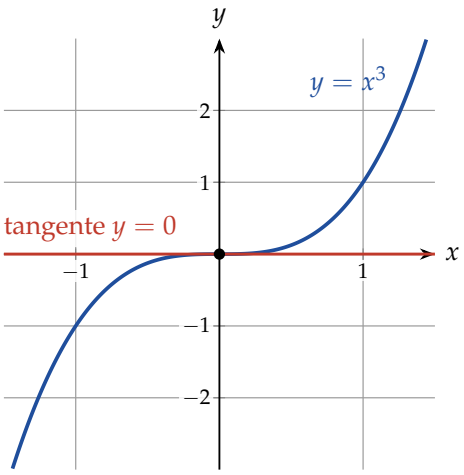
2. Extremums d'une fonction

Théorème : extremum local

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$.

- Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$: la tangente en ce point est **horizontale**.
- Si $f'(c) = 0$ **et si** f' **change de signe en** c, alors f admet un extremum local en c.

Attention. Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 **sans changer de signe** : la tangente en O est horizontale, mais 0 n'est pas un extremum (la courbe traverse sa tangente).



Exemple : une fonction bornée

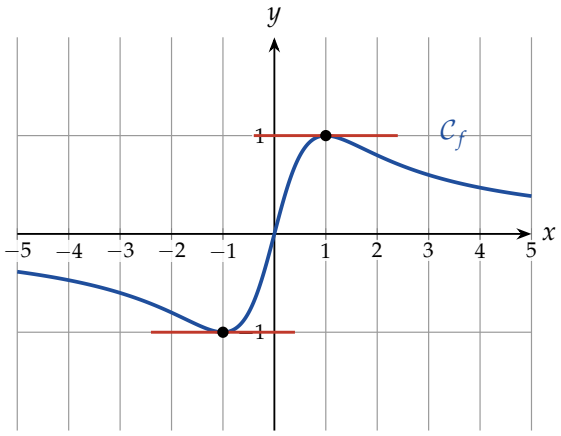
On veut montrer que, pour tout réel x, $-1 \leqslant \dfrac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \geqslant 1$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de $-2(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Comme $f(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > 0$, le tableau montre que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour tout réel x.



La courbe est symétrique par rapport à O (f est impaire) ; ses tangentes horizontales sont en $(-1\,;-1)$ et $(1\,;1)$.

Exercice 6 : étudier des variations

a. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $[-3\,;5]$. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.

.....

.....

b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (avec les valeurs aux bornes et aux extremums).

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

c. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;5]$ et les valeurs de x où ils sont atteints.

.....

.....

d. Soit $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$. Montrer que $g'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$, puis étudier les variations de g.

.....

.....

.....

e. En déduire que, pour tout $x > 1$, $g(x) \geqslant 6$.

.....

.....

3. Optimisation

Exemple : la casserole économique

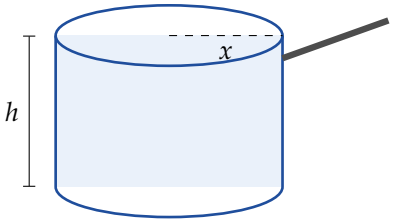
Pourquoi la hauteur d'une casserole est-elle souvent égale à son rayon ?

On veut fabriquer une casserole cylindrique de volume v donné avec le moins de métal possible. On note x le rayon du fond et h la hauteur.

• $v = \pi x^2 h$, donc $h = \dfrac{v}{\pi x^2}$; l'aire de métal (fond + bord) est $S(x) = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$.

• Sur $]0\,;+\infty[$: $S'(x) = 2\pi x - \dfrac{2v}{x^2} = \dfrac{2\pi x^3 - 2v}{x^2}$, qui s'annule pour $x^3 = \dfrac{v}{\pi} = x^2 h$, c'est-à-dire pour $x = h$; S' est négative avant, positive après.

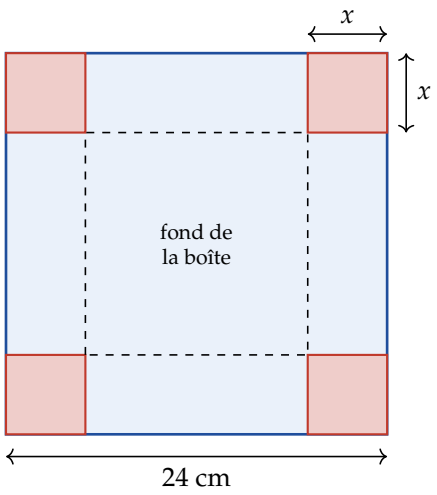
• L'aire de métal est donc **minimale lorsque la hauteur est égale au rayon**.



x	0	h	$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-\ 0\ +$	
$S(x)$	‖	$\searrow\ S(h)\ \nearrow$	

Exercice 7 : la boîte de volume maximal

Dans une plaque carrée de carton de 24 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x (en cm), puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.



a. Justifier que $x \in]0\,;12[$ et que le volume de la boîte est $V(x) = x(24-2x)^2$.

.....

.....

b. Compléter le tableau de valeurs (en cm^3) :

x	1	2	4	6	8	10
$V(x)$						

c. Montrer que $V'(x) = (24-2x)(24-6x)$.

.....

.....

.....

d. Étudier le signe de $V'(x)$ sur $]0\,;12[$, puis dresser le tableau de variations de V.

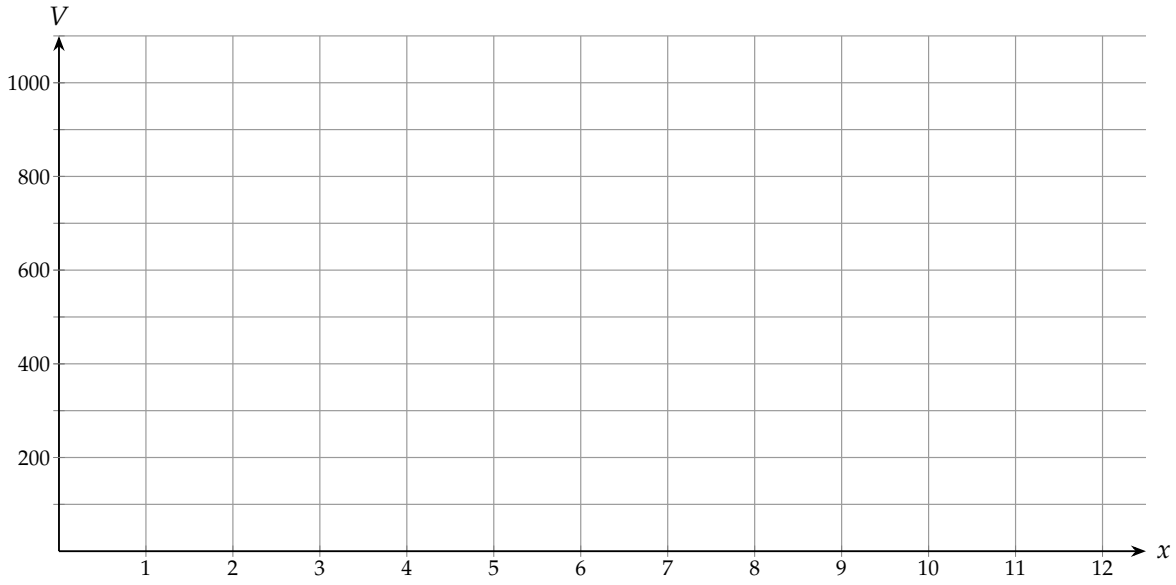
x	
$V'(x)$	
$V(x)$	

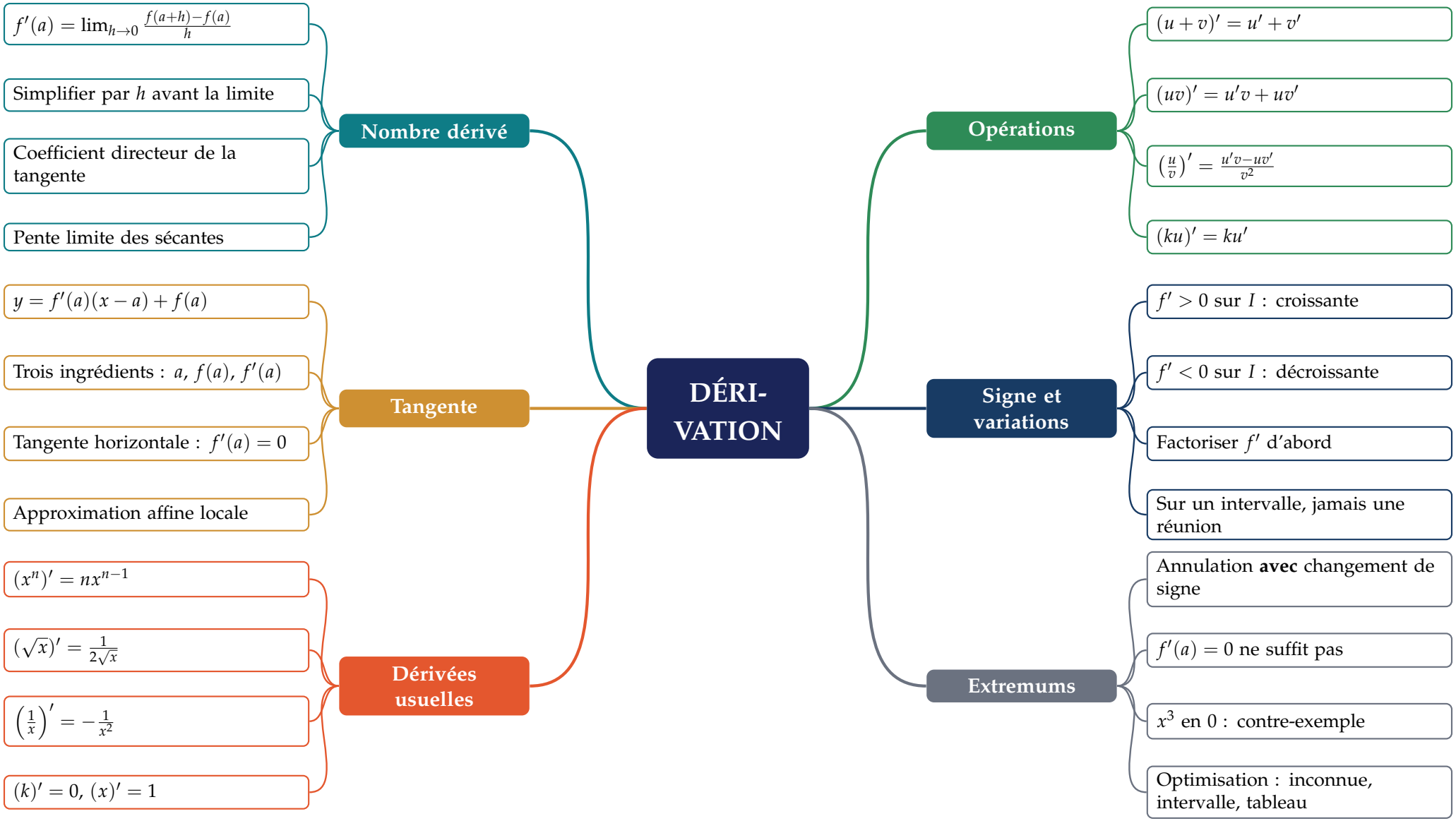
e. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Quel est ce volume maximal ?

.....

.....

f. Placer les points du tableau de la question b. dans le repère ci-dessous, tracer l'allure de la courbe de V, puis sa tangente au point d'abscisse 4.





Chapitre 4 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.