DEVOIR SURVEILLÉ

Dérivation

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Ex. 1 (4 pts) · Ex. 2 (5 pts) · Ex. 3 (6 pts) · Ex. 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants ; toute étude de variations doit s'appuyer sur le signe de la dérivée.

Exercice 1 — Calculs de dérivées (4 points)

Calculer la dérivée de chaque fonction en précisant l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

1. $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$
2. $g(x) = (3x - 1)(x + 4)$
3. $h(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$
4. $k(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$

Exercice 2 — Tangentes (5 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, de courbe $\mathcal{C}$.

1. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 1$.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ à tangente horizontale.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente est parallèle à $y = 9x + 1$.

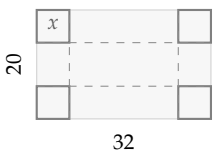
Exercice 3 — Étude d'une fonction (6 points)

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2}$.
2. Étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que le minimum de f vaut $2\sqrt{3}$.
4. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Résoudre $f(x) = 4$.

Exercice 4 — Une boîte de volume maximal (5 points)

Dans une plaque de carton de 20 cm sur 32 cm, on découpe aux quatre coins un carré de côté x, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.



1. Justifier que $x \in]0\,;10[$.
2. Montrer que le volume vaut $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 640x$.
3. Calculer $V'(x)$ et déterminer ses racines.
4. Déterminer le volume maximal et les dimensions de la boîte.