Première Spécialité

Dérivation

Fiche d'exercices

Sur les graphiques, le quadrillage est calé sur les unités des axes ; les tangentes sont tracées en rouge.

Série A ⋆ Automatismes : nombre dérivé et tangentes

Exercice 1 : lire des nombres dérivés ⋆

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f. Ses tangentes aux points A, B, C et D sont tracées.

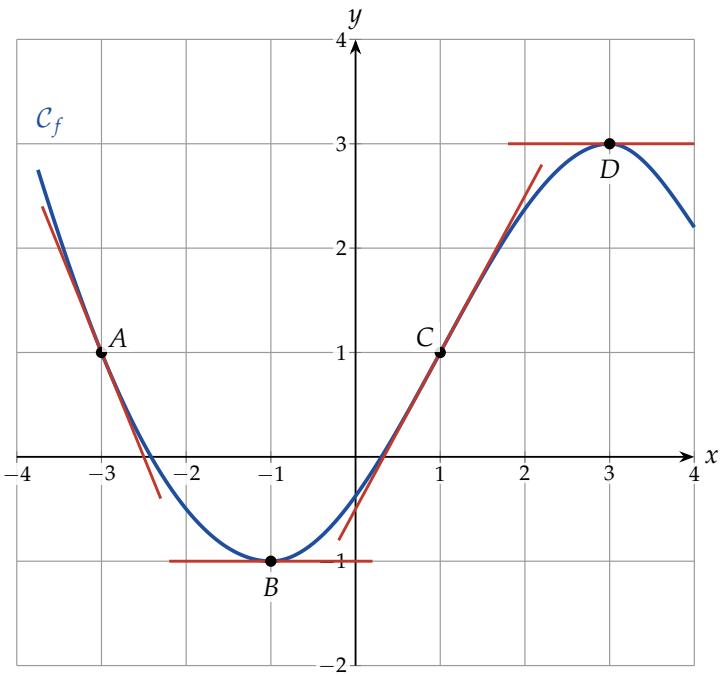
a. Lire $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$.

b. Lire $f'(-3)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

c. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point C.

d. Sans calcul, donner le signe de $f'(-2)$ et celui de $f'(0)$.

e. En quels points la tangente est-elle horizontale ?



Exercice 2 : tracer des tangentes ⋆

La courbe $\mathcal{C}_g$ ci-contre représente une fonction g dérivable sur $[-3\,;3]$. On sait que :

$$g'(-3) = 3, \qquad g'(-1) = \frac{1}{2},$$

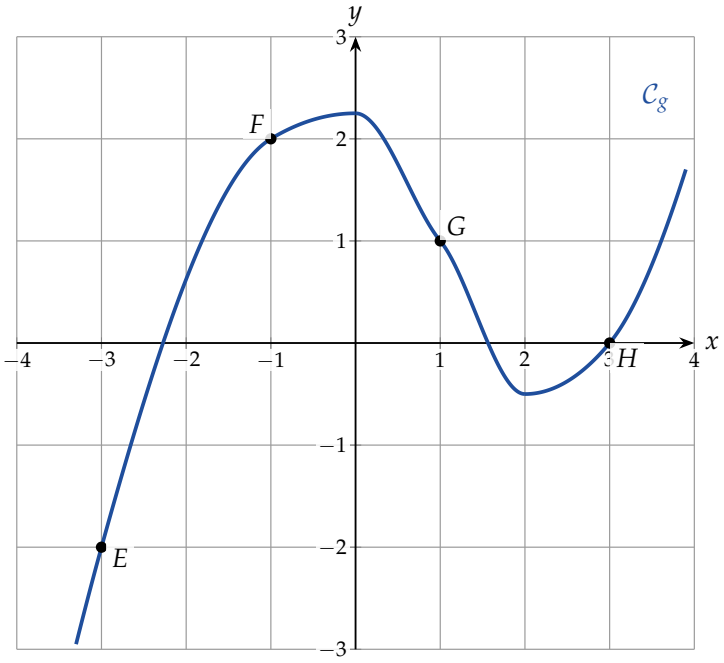
$$g'(1) = -1, \qquad g'(3) = 1.$$

a. Tracer les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points E, F, G et H.

b. Donner une équation de chacune de ces quatre tangentes.

c. Placer les points de $\mathcal{C}_g$ où la tangente semble horizontale. Que vaut alors $g'(x)$?

d. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ sur $[-3\,;3]$.



Exercice 3 : signe du nombre dérivé ⋆⋆

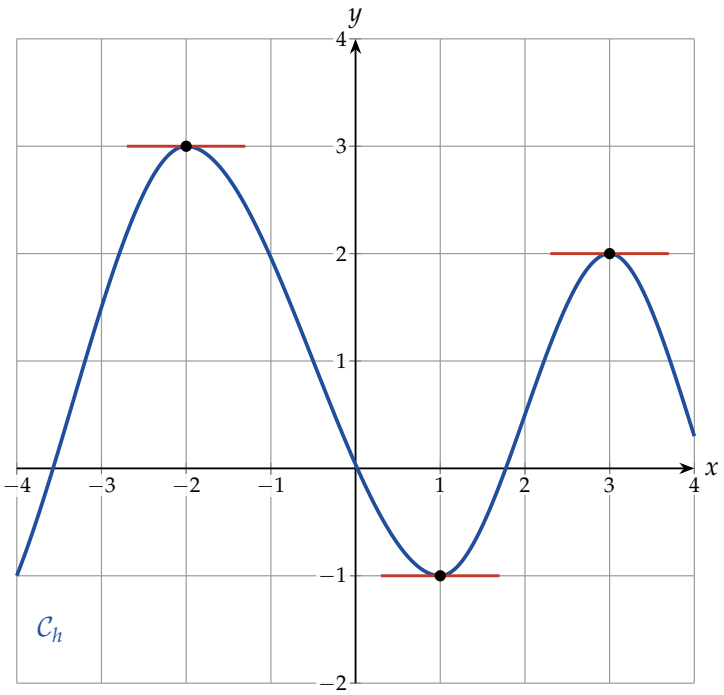
La courbe $\mathcal{C}_h$ ci-contre représente une fonction h dérivable sur $[-4\,;4]$. Elle admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses -2, 1 et 3.

a. Donner le signe de $h'(-3)$, $h'(0)$, $h'(2)$ et $h'(3{,}5)$.

b. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$.

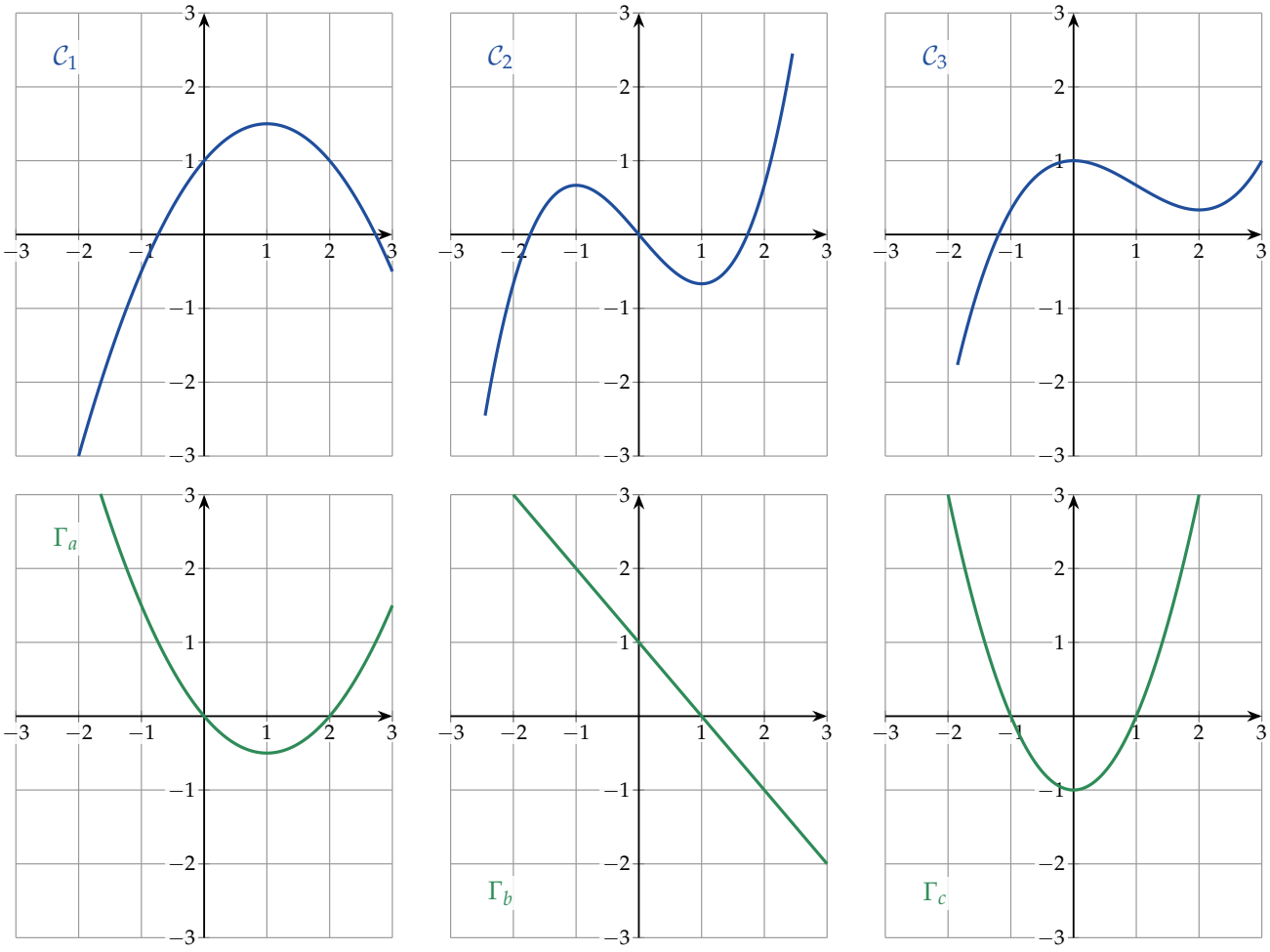
c. Dresser le tableau de signes de $h'(x)$ sur $[-4\,;4]$.

d. Combien de points de $\mathcal{C}_h$ ont une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$? Les placer approximativement.



Exercice 4 : associer une fonction et sa dérivée ⋆⋆

On a représenté ci-dessous trois fonctions f_1, f_2, f_3 (courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, en haut) et leurs fonctions dérivées, dans le désordre (courbes Γ_a, Γ_b, Γ_c, en bas). Associer chaque fonction à sa dérivée, en justifiant à l'aide des tangentes horizontales et du sens de variation.



Exercice 5 : construire une courbe à partir de tangentes ⋆⋆

Une fonction f, dérivable sur $[-4\,;4]$, vérifie :

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	0	3	1	-1
$f'(x)$	2	0	-2	0

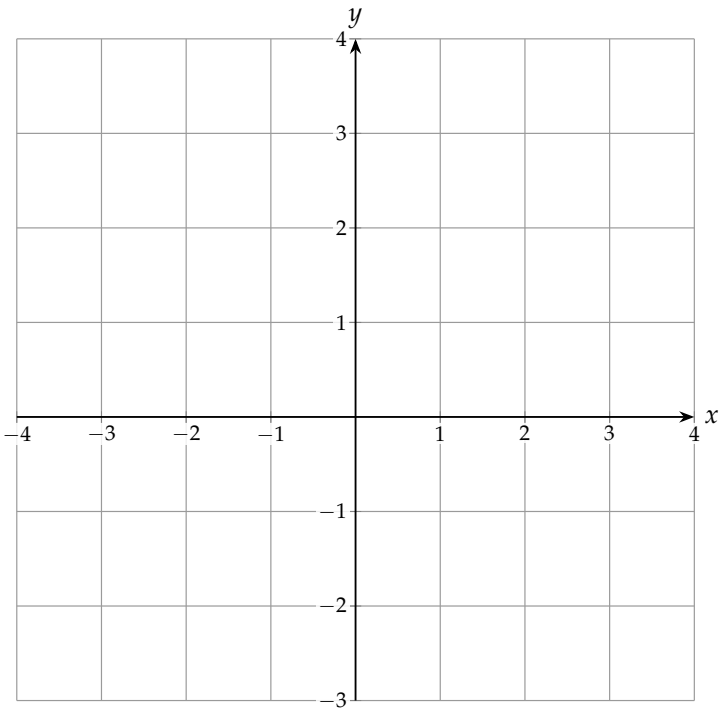
De plus, f est croissante sur $[-4\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;3]$ et croissante sur $[3\,;4]$.

a. Placer les points A, B, C, D de la courbe d'abscisses -3, -1, 1, 3 et tracer les tangentes en ces points.

b. Tracer une courbe possible pour f.

c. Donner une équation de chaque tangente.

d. Quel est le maximum de f sur $[-4\,;3]$?



Série B ⋆⋆ Entraînement : calculs de dérivées et tangentes

Exercice 6 : fonctions de référence et sommes ⋆

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = -2x^5 + \dfrac{x}{3}$ sur $\mathbb{R}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

d. $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ sur $]0\,;+\infty[$

e. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ sur $]0\,;+\infty[$

f. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3x + \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

g. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ sur $]0\,;+\infty[$

h. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 7 : produits et quotients ⋆⋆

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué ; simplifier le résultat.

a. $f(x) = (2x-3)(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = x^2\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

c. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$

d. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

e. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$

f. $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

g. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$

h. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 8 : fonctions $x \mapsto g(ax+b)$ ⋆⋆

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué ; factoriser si possible.

a. $f(x) = (5x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = (1-2x)^4$ sur $\mathbb{R}$

c. $f(x) = \sqrt{4x+8}$ sur $]-2\,;+\infty[$

d. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ sur $]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$

e. $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$

f. $f(x) = x\,(2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

g. $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur $]-\infty\,;1[$

h. $f(x) = x\sqrt{2x+4}$ sur $]-2\,;+\infty[$

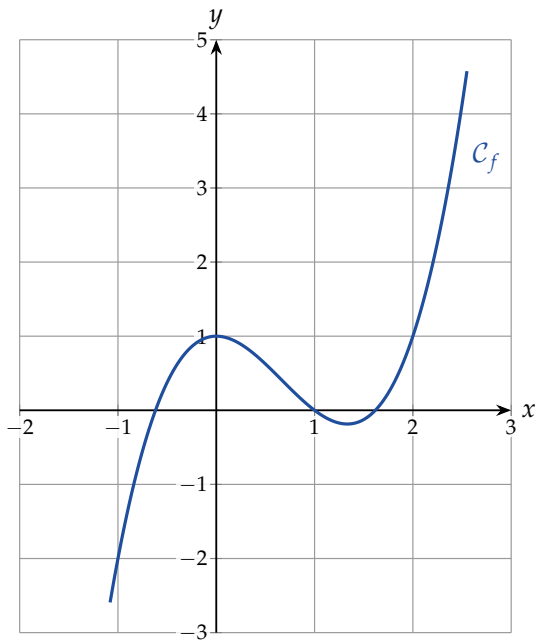
Exercice 9 : équations de tangentes ⋆⋆

a. Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0, 1 et 2, puis tracer ces trois tangentes.

b. Soit $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.
Montrer que $g'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$, puis déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 2.

c. Soit $h(x) = \sqrt{x}$. Déterminer une équation de la tangente aux points d'abscisses 4 et 9.

d. Soit $k(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer une équation de la tangente aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{2}$.



Exercice 10 : tangentes particulières à une parabole ⋆⋆⋆

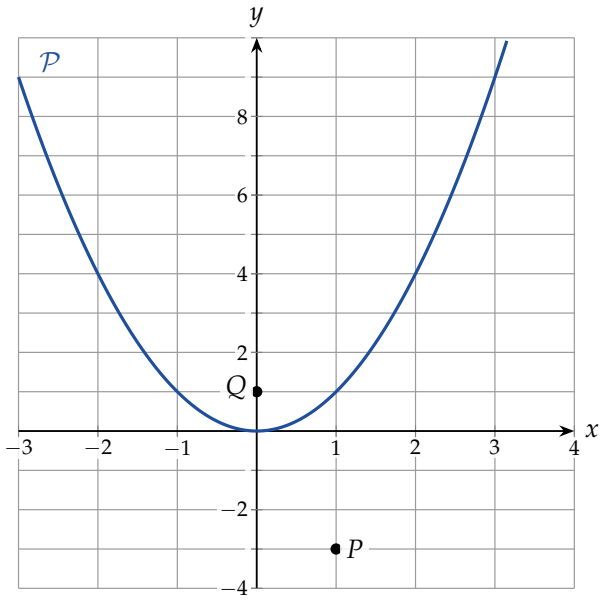
On note $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction carré $f(x) = x^2$ et T_a sa tangente au point d'abscisse a.

a. Montrer que T_a a pour équation $y = 2ax - a^2$.

b. Déterminer le point de $\mathcal{P}$ où la tangente est parallèle à la droite d d'équation $y = 4x + 1$ et donner l'équation de cette tangente.

c. On considère le point $P(1\,;-3)$.
Montrer que T_a passe par P si et seulement si $a^2 - 2a - 3 = 0$.
En déduire les équations des deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par P, puis les tracer.

d. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{P}$ passant par le point $Q(0\,;1)$? Justifier.



Série C ⋆⋆⋆ Applications : dérivation et variations

Exercice 11 : lire le signe de f' sur sa courbe ⋆

Attention : la courbe ci-contre représente la fonction **dérivée** f' d'une fonction f définie sur $[-4\,;4]$ (et non la fonction f elle-même).

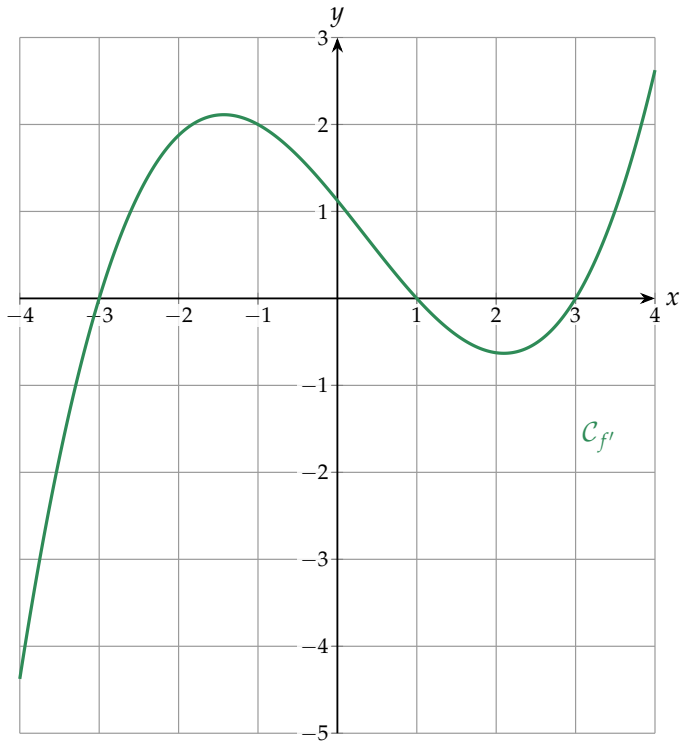
a. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-4\,;4]$.

b. En déduire le tableau de variations de f (sans les valeurs de f).

c. En quelles abscisses f admet-elle un maximum local ? un minimum local ?

d. Lire $f'(-1)$. Que représente ce nombre pour la courbe de f ?

e. En combien de points la courbe de f a-t-elle une tangente horizontale ?



Exercice 12 : fonctions du second degré ⋆

a. Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ?

b. Même question pour $g(x) = -x^2 - 6x + 1$ (on cherchera le maximum de g).

c. Vérifier les résultats à l'aide des formes canoniques $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$ et $g(x) = -(x+3)^2 + 10$.

Exercice 13 : une fonction polynôme de degré 3 ⋆⋆

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

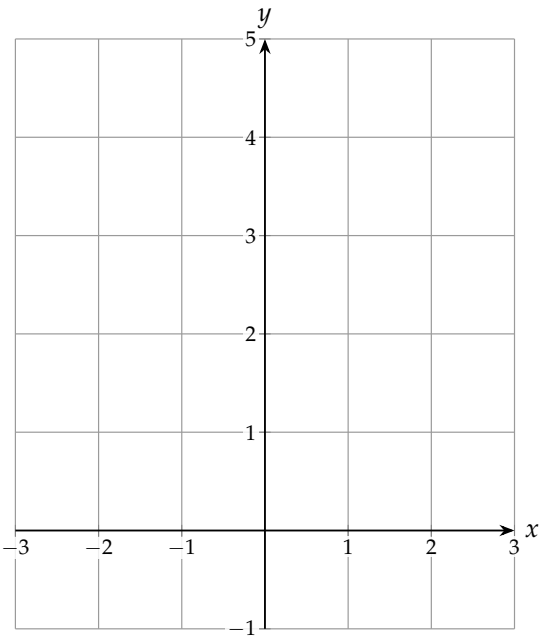
a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

b. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

c. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 0.

d. Vérifier que $f(x) = (x-1)^2(x+2)$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

e. Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f sur $[-2\,;2]$, ses tangentes horizontales et la tangente T.



Exercice 14 : extremums locaux et extremums sur un intervalle ⋆⋆

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ définie sur $[0\,;3]$.

a. Montrer que $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;3]$ (avec les valeurs de f aux bornes et aux extremums locaux).

c. La fonction f admet un maximum local en 1. Est-ce le maximum de f sur $[0\,;3]$? Donner le maximum et le minimum de f sur $[0\,;3]$.

d. Combien l'équation $f(x) = 0{,}5$ a-t-elle de solutions dans $[0\,;3]$? (on s'aidera du tableau de variations)

Exercice 15 : quotients et inégalité ⋆⋆

a. Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

b. Soit $g(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Montrer que $g'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de g.

c. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $x + \dfrac{4}{x} \geqslant 4$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

Exercice 16 : une fonction avec une racine carrée ⋆⋆

Soit $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

a. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et donner le minimum de f.

c. Résoudre $f(x) = 0$, puis déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 4.

Exercice 17 : retrouver une fonction ⋆⋆⋆

On cherche une fonction f de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ (avec a, b, c réels) dont la courbe passe par le point $A(0\,;1)$, passe par le point $B(2\,;-3)$ et admet en B une tangente horizontale.

a. Traduire les trois conditions par des égalités portant sur $f(0)$, $f(2)$ et $f'(2)$.

b. En déduire a, b et c.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. La courbe admet-elle une autre tangente horizontale ?

Exercice 18 : démontrer des inégalités ⋆⋆⋆

a. Soit $h_1(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} - 3$ sur $]0\,;+\infty[$.

Montrer que $h_1'(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{x^2}$, étudier les variations de h_1 et en déduire que :

pour tout $x > 0$, $x^2 + \dfrac{2}{x} \geqslant 3$.

b. Soit $h_2(x) = \dfrac{x+1}{2} - \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Étudier les variations de h_2 et en déduire que :

pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

c. Interpréter graphiquement l'inégalité du b. à l'aide de la tangente à la courbe de la fonction racine carrée au point d'abscisse 1.

Exercice 19 : fonction rationnelle et tangente ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ définie sur $]-1\,;+\infty[$.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

b. Vérifier que $f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$ et retrouver ainsi l'expression de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

d. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 20 : nombre de solutions d'une équation ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ définie sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre.

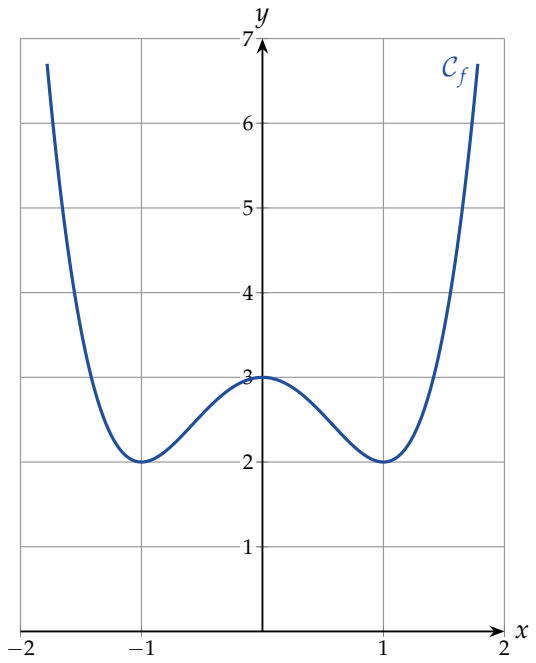
a. Montrer que f est paire : $f(-x) = f(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$ et dresser le tableau de signes de $f'(x)$ (avec une ligne par facteur).

c. Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum sur $\mathbb{R}$.

d. On admet que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque $|x|$ devient grand. Selon les valeurs du réel k, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (on pourra tracer des droites horizontales).

e. Résoudre $f(x) = 3$.



Série D ⋆⋆⋆⋆ Approfondissement : problèmes d'optimisation

Exercice 21 : l'enclos le long de la rivière ⋆⋆

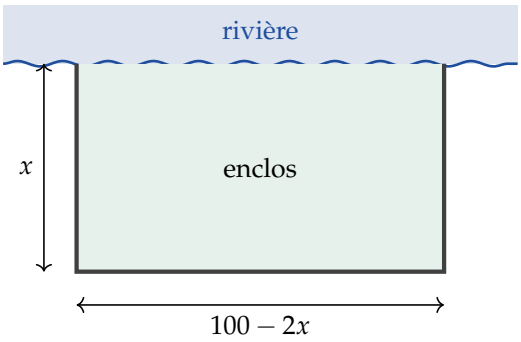
Un éleveur dispose de 100 m de grillage pour construire un enclos rectangulaire le long d'une rivière (le côté longeant la rivière n'est pas grillagé). On note x la largeur de l'enclos (en m), perpendiculaire à la rivière.

a. Justifier que $x \in]0\,;50[$ et que l'aire de l'enclos est $A(x) = x(100-2x)$.

b. Étudier les variations de A sur $]0\,;50[$.

c. Quelles dimensions faut-il choisir pour que l'aire soit maximale ? Quelle est cette aire ?

d. Reprendre le problème pour un enclos entièrement grillagé (quatre côtés, toujours 100 m de grillage). Quelle est la forme de l'enclos d'aire maximale ?



Exercice 22 : coût, recette et bénéfice ⋆⋆⋆

Une entreprise fabrique chaque jour x centaines d'objets, avec $x \in [0\,;10]$. Le coût de production (en milliers d'euros) est

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x + 20,$$

et chaque centaine d'objets est vendue 30 milliers d'euros : la recette est $R(x) = 30x$.

a. Que représente $C(0)$? Calculer $C'(x)$ et montrer que la fonction coût est croissante sur $[0\,;10]$.

b. Exprimer le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ et vérifier que $B'(x) = -3(x-2)(x-8)$.

c. Dresser le tableau de variations de B sur $[0\,;10]$.

d. Combien d'objets faut-il fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?

e. Vérifier que $B(x) = -(x-10)(x^2-5x-2)$. En déduire, à l'unité près, les quantités d'objets pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice ($B(x) > 0$).

Exercice 23 : rectangle sous une parabole ⋆⋆⋆

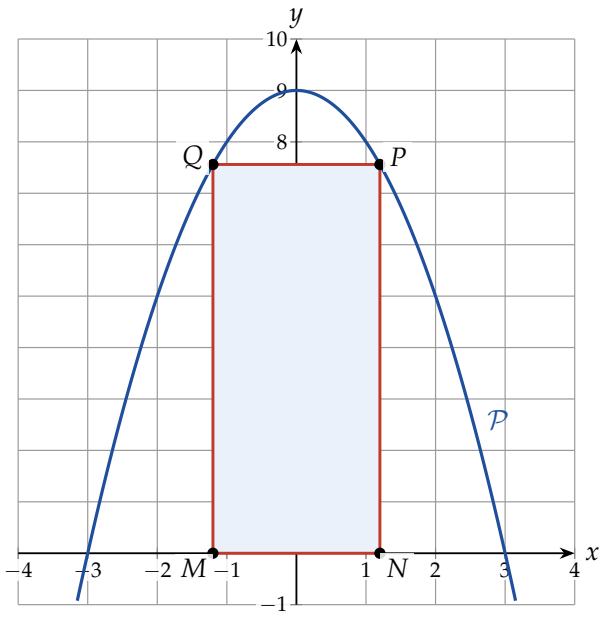
On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 9 - x^2$. Pour $x \in]0\,;3[$, on construit le rectangle $MNPQ$ avec $M(-x\,;0)$, $N(x\,;0)$, et P, Q sur $\mathcal{P}$ (voir la figure).

a. Exprimer les coordonnées de P et Q en fonction de x.

b. Montrer que l'aire du rectangle est $A(x) = 18x - 2x^3$.

c. Étudier les variations de A sur $]0\,;3[$.

d. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Donner la valeur exacte de l'aire maximale, puis une valeur approchée au centième.



Exercice 24 : distance minimale à une courbe ⋆⋆⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction racine carrée, le point $A(3\,;0)$ et un point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x \geqslant 0$.

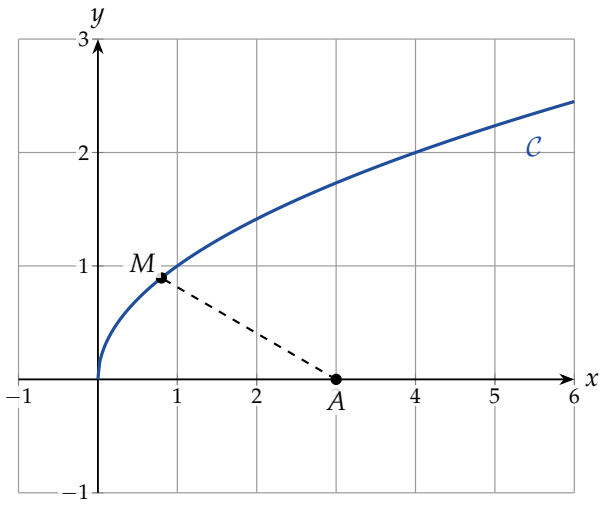
a. Montrer que $AM^2 = x^2 - 5x + 9$.

b. Justifier que AM est minimale lorsque AM^2 est minimale.

c. Étudier les variations de $d(x) = x^2 - 5x + 9$ sur $[0\,;+\infty[$.

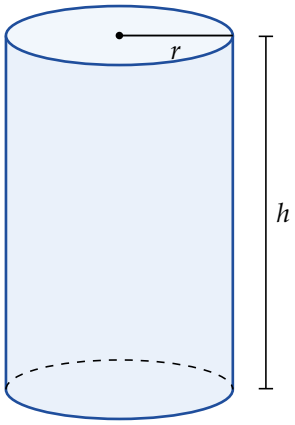
d. En déduire la position du point M_0 de $\mathcal{C}$ le plus proche de A et la distance minimale AM_0 (valeur exacte et valeur approchée).

e. Placer M_0, tracer la droite (AM_0) et la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0. Que remarque-t-on ?



Exercice 25 : la canette économique ⋆⋆⋆⋆

Une canette cylindrique doit contenir 33 cL, soit 330 cm^3. On note r le rayon de sa base et h sa hauteur (en cm). On cherche les dimensions qui minimisent la quantité de métal, c'est-à-dire l'aire totale S (deux disques et la surface latérale).



a. Exprimer h en fonction de r, puis montrer que $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$ pour $r > 0$.

b. Montrer que $S'(r) = \dfrac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$.

c. Étudier le signe de $S'(r)$ (on pourra poser $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$, nombre dont le cube vaut $\dfrac{165}{\pi}$) et dresser le tableau de variations de S.

d. Donner des valeurs approchées au centième de r_0, de la hauteur correspondante h_0 et de l'aire minimale. Vérifier que $h_0 = 2r_0$.

e. Les canettes du commerce sont plus hautes et plus étroites. Proposer une raison.

Exercice 26 : Python, recherche du minimum par balayage ⋆⋆⋆

On reprend la fonction S de l'exercice précédent. On considère le programme Python ci-dessous.

Python

```
from math import pi

def S(r):
    return 2 * pi * r**2 + 660 / r

def balayage(a, b, n):
    pas = (b - a) / n
    rmin, Smin = a, S(a)
    for k in range(1, n + 1):
        r = a + k * pas
        if S(r) < Smin:
            rmin, Smin = r, S(r)
    return rmin, Smin

def taux(a, h):
    return (S(a + h) - S(a)) / h
```

a. Que représentent les variables `pas`, `rmin` et `Smin` ? Expliquer le rôle de la boucle `for`.

b. Quelles valeurs de r sont testées par l'appel `balayage(1, 10, 18)` ?
Calculer $S(3{,}5)$ et $S(4)$; en déduire ce que renvoie cet appel.

c. L'appel `balayage(1, 10, 900)` renvoie `(3.74, 264.357...)`. Quel est le pas ? Comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

d. Quel appel permet d'obtenir r_0 au millième près ?

e. Que calcule `taux(3, 0.001)` ? Comparer sa valeur, environ $-35{,}60$, avec $S'(3)$.

f. Adapter le programme pour obtenir une valeur approchée du **maximum** de la fonction A de l'exercice 23.