Chapitre 5. Cours

Trigonométrie

I. Le cercle trigonométrique

1. Enroulement de la droite numérique

Définition

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un sens de parcours : le sens **direct** (ou positif) est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

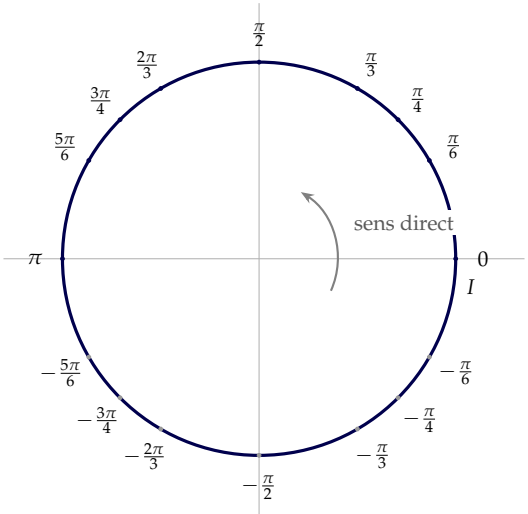
On imagine la droite numérique enroulée autour de ce cercle, l'origine 0 venant sur le point $I(1\,;0)$. À tout réel x correspond alors un unique point M du cercle : c'est le **point image** de x.

Propriété

Le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π. Deux réels x et y ont donc le même point image si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que

$$y = x + 2k\pi.$$

On dit alors que x et y sont **associés modulo** 2π.



5.1 — Les points images des réels remarquables. Les valeurs négatives se lisent dans le sens des aiguilles d'une montre.

2. Cosinus et sinus

Définition

Soit M le point image du réel x sur le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les coordonnées de M sont $(\cos x\,;\sin x)$: l'abscisse de M est le **cosinus** de x, son ordonnée le **sinus** de x.

Propriété

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Démonstration

M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, donc $OM = 1$, c'est-à-dire $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$; en élevant au carré on obtient l'identité. Les encadrements traduisent que M reste dans le carré circonscrit au cercle, et la périodicité vient de ce que x et $x + 2k\pi$ ont le même point image. ■

Attention

$\cos^2 x$ désigne $(\cos x)^2$ et non $\cos(x^2)$: les deux écritures n'ont rien à voir. De même, $\cos x$ n'est pas un produit — on ne peut pas « simplifier par cos ».

II. Valeurs remarquables

Propriété

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque — comment retenir ce tableau

Écrire sur la ligne des sinus $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$: les radicandes se suivent de 0 à 4. La ligne des cosinus est la même, lue à l'envers. Aucun de ces cinq nombres n'est à mémoriser séparément.

Angles associés

Propriété

Pour tout réel x :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$
cosinus	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$
sinus	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$

Chacune de ces formules se lit sur le cercle : $-x$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, $\pi - x$ à la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, $\pi + x$ à la symétrie de centre O, et $\frac{\pi}{2} - x$ à la symétrie par rapport à la première bissectrice, qui échange les deux coordonnées.

Exemple

Calculer $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{6}$.

Solution. $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$, donc $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, donc $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

Méthode Calculer un cosinus ou un sinus remarquable

1. Si l'angle sort de $[0\,;2\pi[$, lui retrancher ou ajouter des multiples de 2π.
2. Repérer le quadrant : il donne immédiatement les **signes** de cos et de sin.
3. Écrire l'angle sous la forme $\pm x$, $\pi \pm x$ ou $\dfrac{\pi}{2} \pm x$ avec x remarquable.
4. Appliquer la formule d'angle associé, puis lire la valeur dans le tableau.

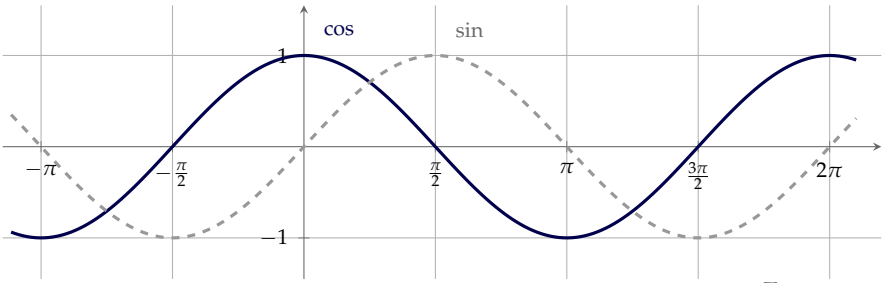
III. Fonctions cosinus et sinus

Définition

Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. Elles sont **périodiques de période** 2π.

Propriété

La fonction cosinus est **paire** : $\cos(-x) = \cos x$; sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La fonction sinus est **impaire** : $\sin(-x) = -\sin x$; sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.



5.2 — Les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation de $\dfrac{\pi}{2}$ vers la droite.

Propriété Variations sur une période

Sur $[0\,;\pi]$, cos est strictement décroissante de 1 à -1 ; sur $[\pi\,;2\pi]$, elle est strictement croissante de -1 à 1.
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, sin est strictement croissante de -1 à 1 ; sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, elle est strictement décroissante de 1 à -1.

IV. Équations trigonométriques

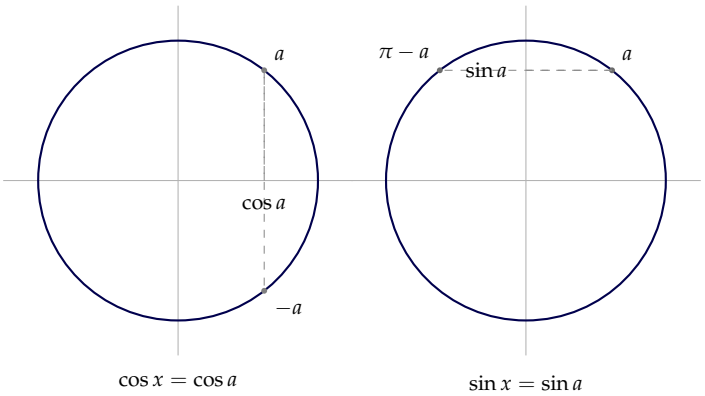
Théorème

Soit a un réel. Pour tout réel x :

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ces deux énoncés se lisent sur le cercle : deux points ont même abscisse lorsqu'ils sont symétriques par rapport à l'axe horizontal, même ordonnée lorsqu'ils sont symétriques par rapport à l'axe vertical.



5.3 — Deux solutions par tour, sauf cas particuliers.

Méthode Résoudre une équation trigonométrique

1. Ramener l'équation à la forme $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$, en identifiant une valeur remarquable.
2. Écrire les *deux* familles de solutions, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Si l'énoncé impose un intervalle, faire varier k et ne conserver que les solutions qui y tombent.
4. Contrôler le nombre de solutions attendu : en général deux par tour.

V. Un exemple résolu complet

Rédaction modèle — Exercice type

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\cos x + 1 = 0$, puis l'inéquation $2\cos x + 1 \geqslant 0$.

Solution.

Équation. $2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Or $-\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$, car $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$, ce qui donne

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans $[0\,;2\pi[$: la première famille donne $\dfrac{2\pi}{3}$ (pour $k = 0$) ; la seconde donne $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$ (pour $k = 1$).

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Inéquation. $2\cos x + 1 \geqslant 0 \iff \cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Sur le cercle, les points d'abscisse supérieure ou égale à $-\dfrac{1}{2}$ forment l'arc situé à droite de la verticale d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$. Cet arc est délimité par les deux solutions trouvées ci-dessus.

Dans $[0\,;2\pi[$, il correspond à $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}\,;2\pi\right[$.

Contrôle. Pour $x = \pi$ (qui n'appartient pas à cet ensemble), $2\cos\pi + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$ ✓. Pour $x = 0$, on obtient $3 \geqslant 0$ ✓.

Attention

L'ensemble solution d'une inéquation trigonométrique sur $[0\,;2\pi[$ est très souvent une *réunion* de deux intervalles, parce que l'arc solution « traverse » l'origine des angles. Faire un dessin du cercle avant d'écrire la réponse évite l'oubli d'un morceau.

VI. Erreurs fréquentes et bons réflexes

✓ Toujours travailler en **radians** ; la calculatrice doit être en mode RAD.

✓ Ne jamais oublier $+2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: sans lui, la réponse est incomplète.

✓ Une équation en cos donne a et $-a$; une équation en sin donne a et $\pi - a$. Ne pas mélanger.

✓ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ sert à passer de l'un à l'autre — au signe près, que le quadrant tranche.

✓ $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ et non $\cos x$.

✓ Un dessin du cercle coûte trente secondes et évite la moitié des erreurs de signe.

VII. Module Python

```
from math import cos, sin, pi
for k in range(0, 7):
  x = k * pi / 6
  print(k, round(cos(x), 4), round(sin(x), 4),
           round(cos(x)**2 + sin(x)**2, 12))
```

Exemple — trace d'exécution

```
0 1.0 0.0 1.0   1 0.866 0.5 1.0   2 0.5 0.866 1.0
3 0.0 1.0 1.0   4 -0.5 0.866 1.0   5 -0.866 0.5 1.0   6 -1.0 0.0 1.0
```

Remarque — interprétation

La colonne des cosinus décroît de 1 à -1 pendant que x parcourt $[0\,;\pi]$: c'est la propriété de variation du III. La dernière colonne vaut 1 à chaque ligne, ce qui illustre l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On y lit aussi $0{,}866 \approx \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $0{,}5 = \dfrac{1}{2}$: la machine confirme le tableau des valeurs remarquables, elle ne le remplace pas — seul le calcul exact donne $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

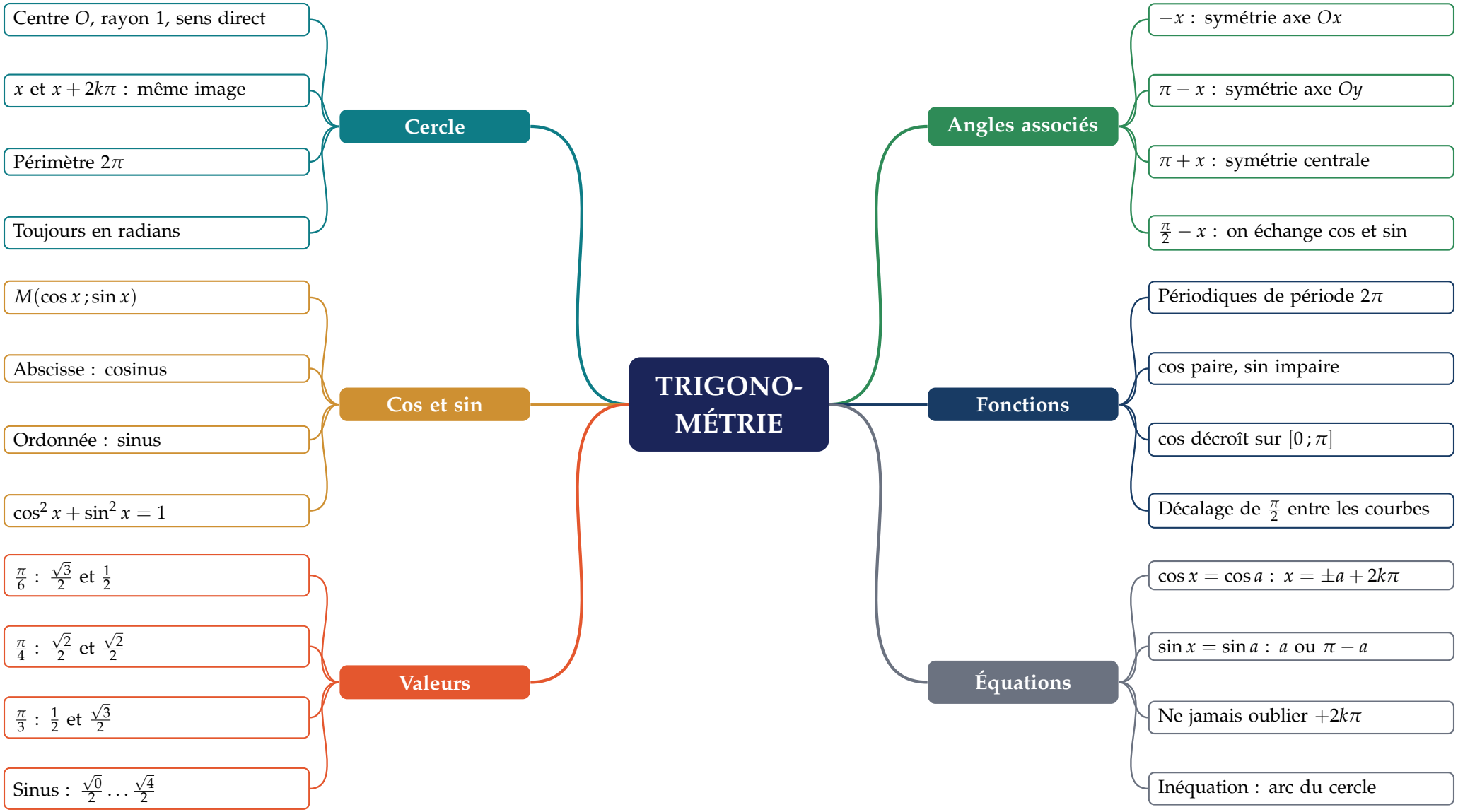
Les trois réflexes du chapitre

1. Tout se lit sur le cercle. Cosinus en abscisse, sinus en ordonnée : signes et angles associés s'en déduisent sans rien mémoriser.

2. Modulo 2π. Deux réels ont même image si leur différence est un multiple de 2π ; toute solution s'écrit avec $+2k\pi$.

3. Deux familles de solutions. $\cos x = \cos a$ donne $\pm a$; $\sin x = \sin a$ donne a et $\pi - a$.

Identité fondamentale. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: elle donne l'un connaissant l'autre, le quadrant fixant le signe.



Chapitre 5 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.