DEVOIR SURVEILLÉ

Trigonométrie

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (6 pts) · Exercice 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants. Toutes les valeurs demandées sont **exactes** : aucune valeur décimale approchée n'est acceptée.

Exercice 1 — Valeurs exactes (4 points)

Donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants, en indiquant l'angle associé utilisé.

1. $\cos\dfrac{3\pi}{4}$ 2. $\sin\dfrac{7\pi}{6}$ 3. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 4. $\sin\dfrac{11\pi}{3}$

Exercice 2 — Identité fondamentale (5 points)

On considère un réel x tel que $\cos x = -\dfrac{8}{17}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

1. Calculer $\sin x$ en justifiant soigneusement le signe.
2. Calculer $\cos(\pi + x)$, $\sin(-x)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
3. Vérifier que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ avec les valeurs trouvées.

Exercice 3 — Équations et inéquation (6 points)

1. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.
2. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, puis donner les solutions de $[0\,;2\pi[$.
4. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'inéquation $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 — Une modélisation (5 points)

La profondeur d'eau, en mètres, dans un port est modélisée sur une journée par

$$p(t) = 7 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

où t désigne le temps en heures, $0 \leqslant t < 24$.

1. Calculer $p(0)$, $p(3)$ et $p(9)$.
2. Déterminer la profondeur maximale et les heures auxquelles elle est atteinte.
3. Un navire ne peut entrer que si la profondeur atteint au moins 8,5 mètres. Déterminer les instants t de $[0\,;12[$ où c'est le cas.

4. Quelle est la période de la fonction p ? Interpréter dans le contexte.