Chapitre 5. Fiche d'exercices n°1

Trigonométrie

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Donner la valeur exacte.

a. $\cos\dfrac{\pi}{3}$ c. $\cos\dfrac{\pi}{6}$ e. $\cos\pi$

b. $\sin\dfrac{\pi}{4}$ d. $\sin\dfrac{\pi}{2}$ f. $\sin\pi$

Exercice 2 ⋆

Déterminer, pour chaque réel, un réel associé appartenant à $[0\,;2\pi[$.

a. $\dfrac{13\pi}{6}$ b. $-\dfrac{\pi}{3}$ c. $\dfrac{9\pi}{2}$

Exercice 3 ⋆

Calculer, en utilisant les angles associés.

a. $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ c. $\cos\dfrac{5\pi}{4}$

b. $\sin\dfrac{5\pi}{6}$ d. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Exercice 4 ⋆

On sait que $\cos x = \dfrac{3}{5}$ et que $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Calculer $\sin x$.

Exercice 5 ⋆

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$.

a. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ b. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 6 ⋆

Préciser le signe de $\cos x$ et celui de $\sin x$ lorsque $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, puis lorsque $x \in \left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 7 ⋆

Simplifier $\cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$, puis $\sin(-x) + \sin(\pi - x)$.

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

On sait que $\sin x = -\dfrac{5}{13}$ et que $x \in \left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

a. Calculer $\cos x$ en justifiant le signe.

b. En déduire $\cos(\pi - x)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 9 ⋆⋆

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$.

a. $2\sin x - 1 = 0$

b. $\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

c. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 10 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$, puis donner les solutions appartenant à $[0\,;2\pi[$.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \sin x$.

a. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

b. Montrer que $\big(f(x)\big)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

c. En déduire $\big(f(x)\big)^2$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, et retrouver le résultat de la question a.

Exercice 12 ⋆⋆

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'inéquation $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Illustrer sur le cercle.

Exercice 13 ⋆⋆

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) - \cos(x + \pi)$.

a. Simplifier $g(x)$.

b. En déduire les variations de g sur $[0\,;\pi]$ et son maximum.

Exercice 14 ⋆⋆

Une roue de fête foraine de rayon 8 mètres tourne dans le sens direct. Un point M de la roue part de la position la plus à droite. Après avoir tourné d'un angle x, sa hauteur au-dessus du centre est $h(x) = 8\sin x$.

a. Calculer $h\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $h\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

b. Pour quelles valeurs de x dans $[0\,;2\pi[$ la hauteur vaut-elle 4 mètres ?

c. Quelle est la hauteur maximale, et pour quel angle est-elle atteinte ?

Exercice 15 ⋆⋆

Démontrer que pour tout réel x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x.$$

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soit x un réel tel que $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$.

a. Calculer $\cos x \sin x$.

b. En déduire que $\cos x$ et $\sin x$ sont les solutions de l'équation $t^2 - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{8} = 0$.

c. Résoudre cette équation.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$.

a. Factoriser $f(x)$ et montrer que $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

b. En déduire que $f(x) = 2\cos^2 x - 1$.

c. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Déterminer tous les réels x de $[0\,;2\pi[$ tels que $\cos x = \sin x$, puis tels que $\cos x = -\sin x$. Interpréter géométriquement sur le cercle.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

La température d'une serre, en degrés Celsius, est modélisée sur une journée par

$$T(t) = 18 + 6\sin\left(\frac{\pi t}{12} - \frac{\pi}{2}\right),$$

où t est l'heure, $0 \leqslant t < 24$.

a. Calculer $T(0)$, $T(6)$, $T(12)$ et $T(18)$.

b. Déterminer la température maximale et l'heure à laquelle elle est atteinte.

c. Résoudre $T(t) = 21$ sur $[0\,;24[$.