Chapitre 6. Cours

Produit scalaire

Le produit scalaire associe à deux vecteurs un *nombre*, et non un vecteur. C'est cette opération qui permet de traduire en calcul les notions d'angle, de longueur et d'orthogonalité : elle fait entrer la géométrie dans l'algèbre.

I. Quatre expressions du produit scalaire

1. Définition par les normes et l'angle

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et θ l'angle géométrique qu'ils forment. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta.$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. On note ce nombre $\vec{u}^2$ et on l'appelle le **carré scalaire** de $\vec{u}$.

Démonstration

L'angle d'un vecteur avec lui-même est nul, et $\cos 0 = 1$: le produit vaut donc $\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1$. ■

2. Expression analytique

Théorème

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Attention

Cette formule n'est valable que dans un repère **orthonormé**. Elle est la plus rapide dès que les coordonnées sont connues, et c'est presque toujours par elle qu'on commence en pratique.

Exemple

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(3\,;-1)$ et $\vec{v}(2\,;5)$, puis $\|\vec{u}\|$.

Solution. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$.
$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = 3^2 + (-1)^2 = 10$, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$.

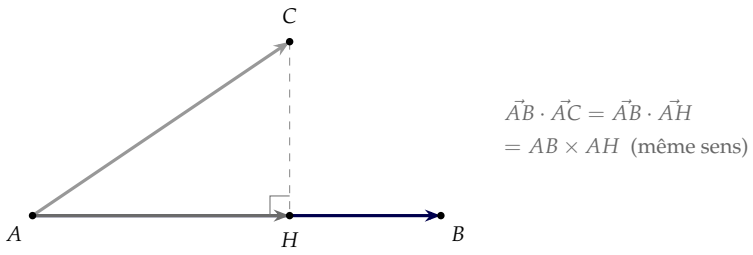
3. Expression par le projeté orthogonal

Théorème

Soit A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \pm\, AB \times AH,$$

le signe étant $+$ si $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ ont le même sens, $-$ sinon.



7.1 — Seule la composante de $\vec{AC}$ dans la direction de $\vec{AB}$ compte.

4. Expression par les normes

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big).$$

Démonstration

On développe $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ à l'aide de la bilinéarité et de la symétrie, puis on isole $\vec{u}\cdot\vec{v}$. La seconde égalité s'obtient de même avec $\vec{u}-\vec{v}$. ■

Cette forme est utile lorsque l'énoncé donne trois longueurs — les côtés d'un triangle, par exemple — sans aucune coordonnée.

II. Propriétés de calcul

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **symétrie** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
- **bilinéarité** : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- **positivité** : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété Identités remarquables

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Attention

Le produit scalaire n'est pas un produit de nombres : l'écriture $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ n'a aucun sens, car $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un réel et le produit scalaire ne s'applique qu'à deux vecteurs. De même, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: il n'y a pas de « règle du produit nul » pour le produit scalaire.

III. Orthogonalité

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

En repère orthonormé, cela s'écrit $xx' + yy' = 0$.

Démonstration

Si les deux vecteurs sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ s'annule si et seulement si $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Si l'un est nul, le produit est nul par convention, et le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. ■

Théorème Théorème de Pythagore, forme vectorielle

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Démonstration

D'après l'identité remarquable, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$, qui est nul exactement lorsque les vecteurs sont orthogonaux. ■

Méthode Montrer que deux droites sont perpendiculaires

1. Choisir un vecteur directeur de chaque droite — souvent $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.
2. Calculer leurs coordonnées par différence des coordonnées des points.
3. Calculer le produit scalaire $xx' + yy'$.
4. Conclure : nul, les droites sont perpendiculaires ; non nul, elles ne le sont pas.

IV. Angle de deux vecteurs

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, l'angle θ qu'ils forment vérifie

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Le signe du produit scalaire donne immédiatement la nature de l'angle : positif, l'angle est aigu ; nul, il est droit ; négatif, il est obtus.

Exemple

Déterminer une valeur approchée de l'angle entre $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(3\,;-1)$.

Solution. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3-2 = 1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$.

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0{,}1414.$$

La calculatrice donne $\theta \approx 1{,}429$ radian, soit environ 81,9 degrés. Le produit scalaire étant positif, l'angle est bien aigu.

V. Un exemple résolu complet

Rédaction modèle — Exercice type

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;2)$, $B(5\,;4)$ et $C(2\,;7)$.

1. Calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.
2. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?
3. Calculer $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{AC}\|$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, puis vérifier si ce parallélogramme est un rectangle.

Solution.

1. $\vec{AB}\begin{pmatrix}5-1\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2-1\\7-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 4\times 1 + 2\times 5 = 4+10 = 14.$$

2. Ce produit vaut $14 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux, le triangle n'est **pas** rectangle en A. Le produit étant positif, l'angle en A est aigu.

3. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$.

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{14}{2\sqrt{5}\times\sqrt{26}} = \frac{14}{2\sqrt{130}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \approx 0{,}614.$$

Donc $\widehat{BAC} \approx 0{,}909$ radian, soit environ 52,1 degrés.

4. $ABDC$ est un parallélogramme lorsque $\vec{AB} = \vec{CD}$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}x_D-2\\y_D-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad D(6\,;9).$$

Un parallélogramme est un rectangle lorsque deux côtés consécutifs sont perpendiculaires, c'est-à-dire ici lorsque $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$. Or ce produit vaut 14 : $ABDC$ **n'est pas** un rectangle.

Contrôle. Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont pour milieux respectifs $\left(\frac{1+6}{2}\,;\frac{2+9}{2}\right) = (3{,}5\,;5{,}5)$ et $\left(\frac{5+2}{2}\,;\frac{4+7}{2}\right) = (3{,}5\,;5{,}5)$: elles se coupent bien en leur milieu ✓.

VI. Erreurs fréquentes et bons réflexes

✓ Le produit scalaire est un **nombre**, pas un vecteur : ne jamais mettre de flèche sur le résultat.

✓ $xx' + yy'$ n'est valable qu'en repère **orthonormé**.

✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie orthogonaux, pas « l'un des deux est nul ».

✓ Le signe du produit scalaire donne la nature de l'angle : $+$ aigu, 0 droit, $-$ obtus.

✓ $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$: c'est le pont entre longueurs et produit scalaire.

✓ Choisir la bonne expression : coordonnées → analytique ; longueurs → normes ; figure → projeté.

VII. Module Python

```
from math import sqrt, acos, degrees
def scal(u, v):
  return u[0]*v[0] + u[1]*v[1]
def norme(u):
  return sqrt(scal(u, u))
def angle(u, v):
  return degrees(acos(scal(u, v) / (norme(u) * norme(v))))
AB, AC = (4, 2), (1, 5)
print(scal(AB, AC), round(norme(AB), 4), round(norme(AC), 4))
print(round(angle(AB, AC), 2))
print(scal((3, 1), (-1, 3)), round(angle((3, 1), (-1, 3)), 2))
```

Exemple — trace d'exécution

```
14 4.4721 5.099   52.13   0 90.0
```

Remarque — interprétation

La première ligne redonne les trois valeurs de l'exemple résolu ; la deuxième, l'angle en degrés. La troisième teste un cas d'orthogonalité : le produit scalaire vaut exactement 0 et l'angle exactement 90 degrés. Noter que le programme travaille sur des flottants — 4,4721 est une approximation de $2\sqrt{5}$: seule la forme exacte figure dans une copie.

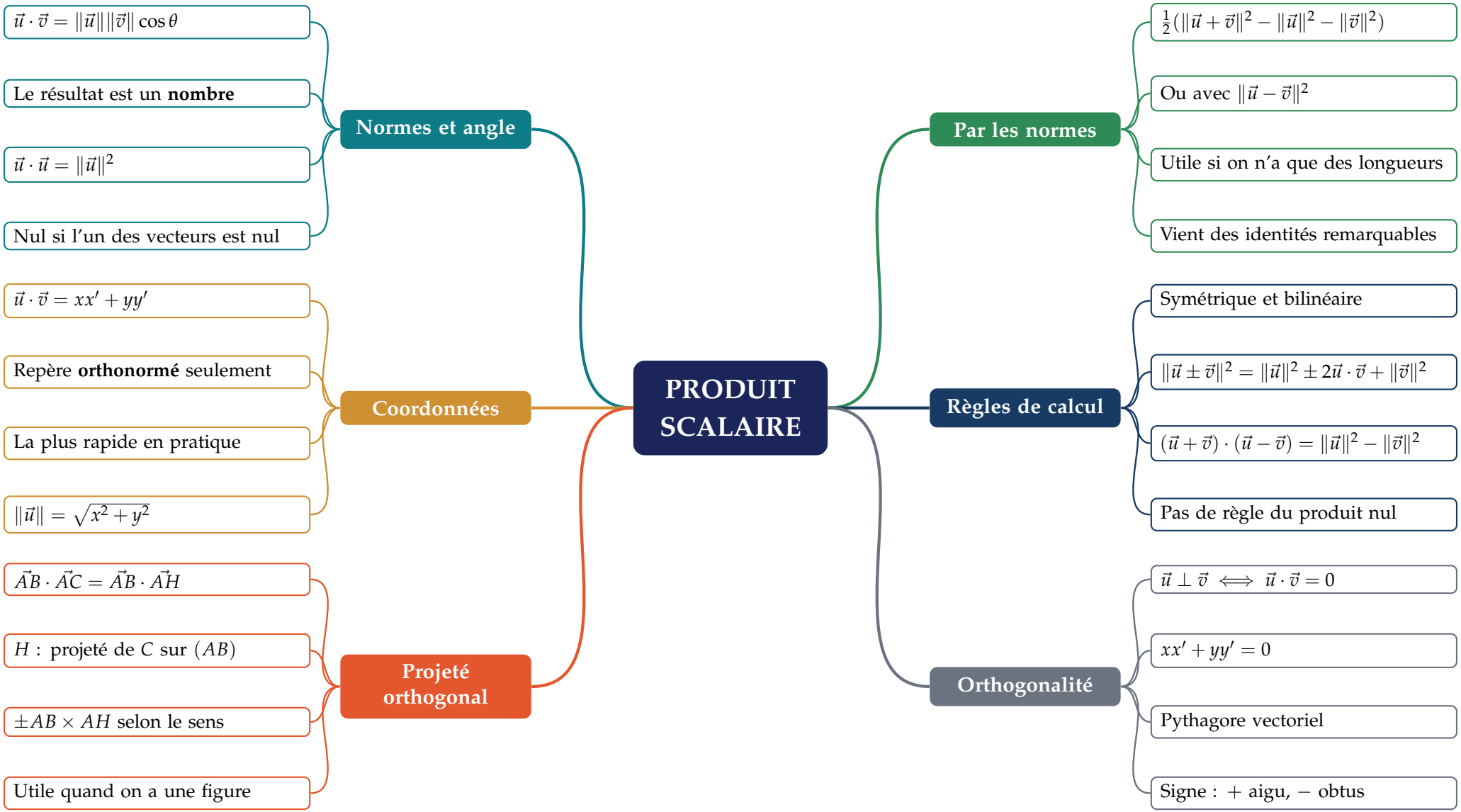
Les trois réflexes du chapitre

1. Quatre expressions, un seul objet. Normes et angle, coordonnées, projeté, différences de normes : on choisit celle que les données rendent immédiate.

2. Orthogonalité $\iff$ produit nul. C'est la traduction algébrique de la perpendicularité, et l'outil de presque tous les exercices.

3. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. Cette égalité relie les longueurs au produit scalaire et permet de développer les identités remarquables vectorielles.

Signe. Positif : angle aigu. Nul : angle droit. Négatif : angle obtus.



Chapitre 6 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.