DEVOIR SURVEILLÉ

Produit scalaire

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (6 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 — Calculs directs (4 points)

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(5\,;-2)$ et $\vec{v}(3\,;4)$.
2. Déterminer m pour que $\vec{u}(m\,;4)$ et $\vec{v}(8\,;-2)$ soient orthogonaux.
3. On donne $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 4$ et un angle de $\dfrac{2\pi}{3}$ entre eux. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
4. On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 2 — Un triangle (6 points)

On considère les points $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(0\,;7)$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Le triangle est-il rectangle en A ?
3. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$. Conclure sur la nature du triangle ABC.
4. Calculer les longueurs AB, BC et AC, et vérifier le résultat de la question 3 par le théorème de Pythagore.
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 — Angles (5 points)

On donne $\vec{u}(1\,;3)$ et $\vec{v}(4\,;-2)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sous forme exacte.
2. Sans calculer l'angle, préciser s'il est aigu, droit ou obtus. Justifier.
3. Calculer $\cos\theta$ sous forme exacte, puis une valeur approchée de θ en degrés au dixième.
4. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$, puis tous les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

Exercice 4 — Un lieu géométrique (5 points)

On considère les points $A(-3\,;0)$ et $B(3\,;0)$, et l'on note I le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées de I.
2. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Exprimer $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ en fonction de x et y.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Reconnaître cet ensemble et le décrire précisément.
4. Déterminer de même l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$.

5. Le point $P(0\,;5)$ appartient-il à l'un de ces deux ensembles ?