Chapitre 6. Fiche d'exercices n°1

Produit scalaire

Sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a. $\vec{u}(3\,;2)$, $\vec{v}(1\,;4)$
b. $\vec{u}(-2\,;5)$, $\vec{v}(3\,;1)$
c. $\vec{u}(4\,;-1)$, $\vec{v}(1\,;4)$
d. $\vec{u}(0\,;3)$, $\vec{v}(7\,;0)$

Exercice 2 ⋆

Calculer la norme de chaque vecteur.

a. $\vec{u}(3\,;4)$ b. $\vec{v}(-5\,;12)$ c. $\vec{w}(1\,;1)$

Exercice 3 ⋆

Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

a. $\vec{u}(2\,;6)$ et $\vec{v}(-3\,;1)$
b. $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(2\,;1)$

Exercice 4 ⋆

On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 5 ⋆

Déterminer le réel m pour que $\vec{u}(m\,;3)$ et $\vec{v}(6\,;-2)$ soient orthogonaux.

Exercice 6 ⋆

Soit $A(1\,;1)$, $B(4\,;3)$ et $C(0\,;5)$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et préciser la nature de l'angle en A.

Exercice 7 ⋆

Développer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ sachant que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

Soit $A(-1\,;2)$, $B(3\,;0)$ et $C(4\,;6)$.

a. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
b. Le triangle ABC possède-t-il un angle droit ? Quel est son angle le plus « ouvert » ?

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $A(0;0)$, $B(6;2)$ et $C(2;4)$.

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
b. En déduire son aire.
c. Vérifier le théorème de Pythagore par le calcul des trois longueurs, et préciser la nature exacte du triangle.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(1;4)$.

a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
b. En déduire une valeur approchée en degrés de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
c. Cet angle est-il aigu ou obtus ? Le lire directement sur le signe du produit scalaire.

Exercice 11 ⋆⋆

$ABCD$ est un carré de côté 6. Le point I est le milieu de $[BC]$.

a. En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A;\frac{1}{6}\vec{AB},\frac{1}{6}\vec{AD}\right)$, donner les coordonnées de A, B, C, D et I.
b. Calculer $\vec{AI}\cdot\vec{AC}$.
c. Les droites (AI) et (DB) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=6$.

a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
b. En déduire $\cos\theta$, puis une valeur approchée de θ en degrés.
c. Calculer $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Exercice 13 ⋆⋆

Soit $A(2;1)$ et $B(6;3)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\vec{AM}\cdot\vec{AB}=0$, et reconnaître cet ensemble.

Exercice 14 ⋆⋆

Dans un triangle ABC, on donne $AB=7$, $AC=5$ et $BC=6$.

a. Calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ à l'aide de la formule des normes.
b. En déduire $\cos\widehat{BAC}$ puis une valeur approchée de cet angle.

Exercice 15 ⋆⋆

Soit $A(1;-1)$, $B(5;1)$, $C(4;4)$ et $D(0;2)$.

a. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
b. Est-ce un rectangle ? un losange ?

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$, et I le milieu de $[AB]$.

a. Démontrer que pour tout point M du plan, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 16$.

b. En déduire l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, puis celui des points tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 9$.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

a. Démontrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.

b. Interpréter cette égalité dans un parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(1\,;3)$. On note H le pied de la hauteur issue de C.

a. Déterminer les coordonnées de H en utilisant l'orthogonalité.

b. Vérifier la relation $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.

c. Calculer l'aire du triangle ABC de deux façons.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle et H son orthocentre. On pose $\vec{HA} = \vec{a}$, $\vec{HB} = \vec{b}$, $\vec{HC} = \vec{c}$.

a. Traduire par des produits scalaires le fait que $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (AC)$.

b. En déduire que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c}$.

c. En déduire que $(CH) \perp (AB)$: les trois hauteurs sont bien concourantes.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit $A(1\,;0)$ et $B(5\,;0)$. Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que

$$MA^2 + MB^2 = 26.$$