Chapitre 7. Cours

Application du produit scalaire

Le chapitre précédent a construit l'outil. Celui-ci le met au travail : relations métriques dans le triangle, équations de droites et de cercles, lieux géométriques. Le produit scalaire devient un langage qui traduit les énoncés de géométrie en équations que l'algèbre sait résoudre.

I. Relations métriques dans le triangle

1. Théorème d'Al-Kashi

Théorème Al-Kashi

Dans un triangle ABC, en notant $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Les deux autres relations s'obtiennent par permutation circulaire.

Démonstration

On écrit $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ et on élève au carré scalaire :

$$BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2\,\vec{AC}\cdot\vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \quad \blacksquare$$

Remarque — Pythagore comme cas particulier

Si $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos\widehat{A} = 0$ et la relation devient $a^2 = b^2 + c^2$. Le théorème d'Al-Kashi est donc un Pythagore « corrigé » par un terme qui mesure l'écart à l'angle droit — négatif si l'angle est aigu, positif s'il est obtus.

Méthode Choisir sa relation

- Trois longueurs connues, un angle cherché : écrire Al-Kashi et isoler $\cos\widehat{A}$.
- Deux longueurs et l'angle compris connus, le troisième côté cherché : appliquer directement la formule.

2. Théorème de la médiane

Théorème

Soit A et B deux points, I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}, \qquad \vec{MA}\cdot\vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Démonstration

On décompose sur I : $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$.

Le produit des deux donne $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

La somme des carrés donne $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$. ■

II. Droites et produit scalaire

1. Vecteur normal

Définition

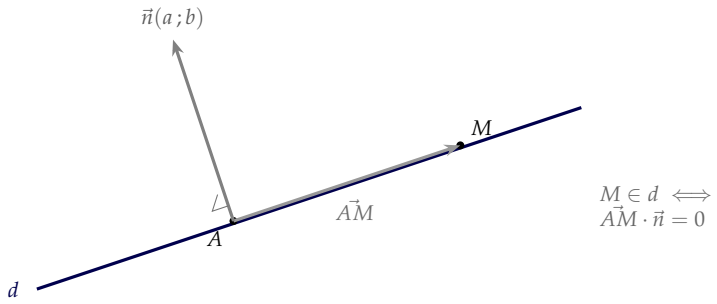
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Théorème

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point et $\vec{n}(a\,;b)$ un vecteur non nul. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Son équation est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0, \qquad \text{soit} \qquad ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -ax_A - by_A.$$

Réciproquement, toute droite d'équation $ax + by + c = 0$ (avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$) admet $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal et $\vec{u}(-b\,;a)$ pour vecteur directeur.



8.1 — Une droite est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}$ soit orthogonal à $\vec{n}$.

Attention

Ne pas confondre **directeur** et **normal**. Pour la droite $3x - 2y + 1 = 0$, le vecteur normal est $\vec{n}(3\,;-2)$ et le vecteur directeur $\vec{u}(2\,;3)$: on échange les coordonnées et on change un signe. Vérification systématique : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$ ✓.

2. Distance d'un point à une droite

Propriété

La distance du point $M(x_0\,;y_0)$ à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ vaut

$$\mathrm{d}(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

C'est la longueur MH, où H est le projeté orthogonal de M sur d — la plus courte distance de M à un point de la droite.

III. Équations de cercles

Théorème

Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega)$ et de rayon $R>0$ a pour équation

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2.$$

Démonstration

M appartient au cercle si et seulement si $\Omega M=R$, c'est-à-dire $\Omega M^2=R^2$, ce qui s'écrit avec les coordonnées $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$. ■

Théorème Cercle de diamètre $[AB]$

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0.$$

Démonstration

D'après le théorème de la médiane, $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de $[AB]$. Cette quantité est nulle si et seulement si $MI=\dfrac{AB}{2}$, c'est-à-dire si M est sur le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$. ■

Méthode Reconnaître un cercle dans une équation développée

1. Regrouper les termes en x d'une part, en y d'autre part.
2. **Compléter le carré** dans chaque groupe : $x^2-2\alpha x=(x-\alpha)^2-\alpha^2$.
3. Rassembler les constantes dans le membre de droite.
4. Conclure : si ce membre est strictement positif, c'est un cercle de rayon sa racine carrée ; s'il est nul, l'ensemble se réduit à un point ; s'il est négatif, l'ensemble est vide.

Exemple

Déterminer la nature de l'ensemble d'équation $x^2+y^2-6x+4y+9=0$.

Solution. $x^2-6x=(x-3)^2-9$ et $y^2+4y=(y+2)^2-4$.
L'équation devient $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+9=0$, soit

$$(x-3)^2+(y+2)^2=4.$$

C'est le cercle de centre $\Omega(3\,;-2)$ et de rayon 2.

IV. Un exemple résolu complet

Rédaction modèle — Exercice type

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;2)$, $B(7\,;4)$ et la droite d d'équation $3x+y-5=0$.

1. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de d.
2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à d.
3. Calculer la distance de B à la droite d.
4. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, puis vérifier que le point $C(5\,;6)$ lui appartient.

Solution.

1. L'équation étant $3x+y-5=0$, un vecteur normal est $\vec{n}(3\,;1)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;3)$.
Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{u}=3\times(-1)+1\times 3=0$ ✓.

2. Δ est perpendiculaire à d, donc son *vecteur directeur* est $\vec{n}(3\,;1)$ et son *vecteur normal* est $\vec{u}(-1\,;3)$.
Son équation est donc de la forme $-x+3y+c=0$. Le point $A(1\,;2)$ y appartient :

$$-1+6+c=0 \quad\Longrightarrow\quad c=-5.$$

Une équation de Δ est $-x+3y-5=0$, ou encore $x-3y+5=0$.

3. Avec $a=3$, $b=1$, $c=-5$ et $B(7\,;4)$:

$$\mathrm{d}(B,d)=\frac{|3\times 7+1\times 4-5|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|21+4-5|}{\sqrt{10}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}\approx 6{,}32.$$

4. Le centre du cercle est le milieu I de $[AB]$:

$$I\left(\frac{1+7}{2}\,;\frac{2+4}{2}\right)=I(4\,;3).$$

Le rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$, avec $AB=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, donc $R=\sqrt{10}$.
Une équation de $\mathcal{C}$ est

$$(x-4)^2+(y-3)^2=10.$$

Pour $C(5\,;6)$: $(5-4)^2+(6-3)^2=1+9=10$: l'égalité est vérifiée, donc C **appartient** au cercle.
Contrôle par le produit scalaire. $\vec{CA}(-4\,;-4)$ et $\vec{CB}(2\,;-2)$ donnent $\vec{CA}\cdot\vec{CB}=-8+8=0$: le triangle ABC est rectangle en C, ce qui est exactement la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ ✓.

V. Erreurs fréquentes et bons réflexes

✓ Dans $ax+by+c=0$, $(a\,;b)$ est le vecteur **normal**, pas le directeur.

✓ Ne pas oublier la valeur absolue au numérateur de la formule de distance.

✓ Al-Kashi : le terme $-2bc\cos\widehat{A}$ porte sur l'angle *compris* entre les côtés b et c.

✓ Compléter le carré, ce n'est pas deviner : $x^2+px=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}$.

✓ Une équation de cercle a toujours les *mêmes* coefficients pour x^2 et y^2, et aucun terme en xy.

✓ Un rayon au carré négatif signifie ensemble vide, pas erreur de calcul — mais vérifier tout de même.

VI. Module Python

```
from math import sqrt, acos, degrees
def alkashi(b, c, A_deg):
  from math import cos, radians
  return sqrt(b*b + c*c - 2*b*c*cos(radians(A_deg)))
def angle(a, b, c):
  # angle en A, oppose au cote a
  return degrees(acos((b*b + c*c - a*a) / (2*b*c)))
def dist(a, b, c, x0, y0):
  return abs(a*x0 + b*y0 + c) / sqrt(a*a + b*b)
print(round(alkashi(5, 7, 60), 4))
print(round(angle(6, 5, 7), 2))
print(round(dist(3, 1, -5, 7, 4), 4))
```

Exemple — trace d'exécution

```
6.245   57.12   6.3246
```

Remarque — interprétation

La première ligne calcule le troisième côté d'un triangle de côtés 5 et 7 formant un angle de 60 degrés : $\sqrt{25+49-35}=\sqrt{39}\approx 6{,}245$. La deuxième retrouve l'angle d'un triangle de côtés 5, 6, 7. La troisième redonne $2\sqrt{10}\approx 6{,}3246$, la distance calculée dans l'exemple résolu. Chaque fois, la machine confirme un résultat exact obtenu à la main — c'est le rôle qu'on lui donne ici.

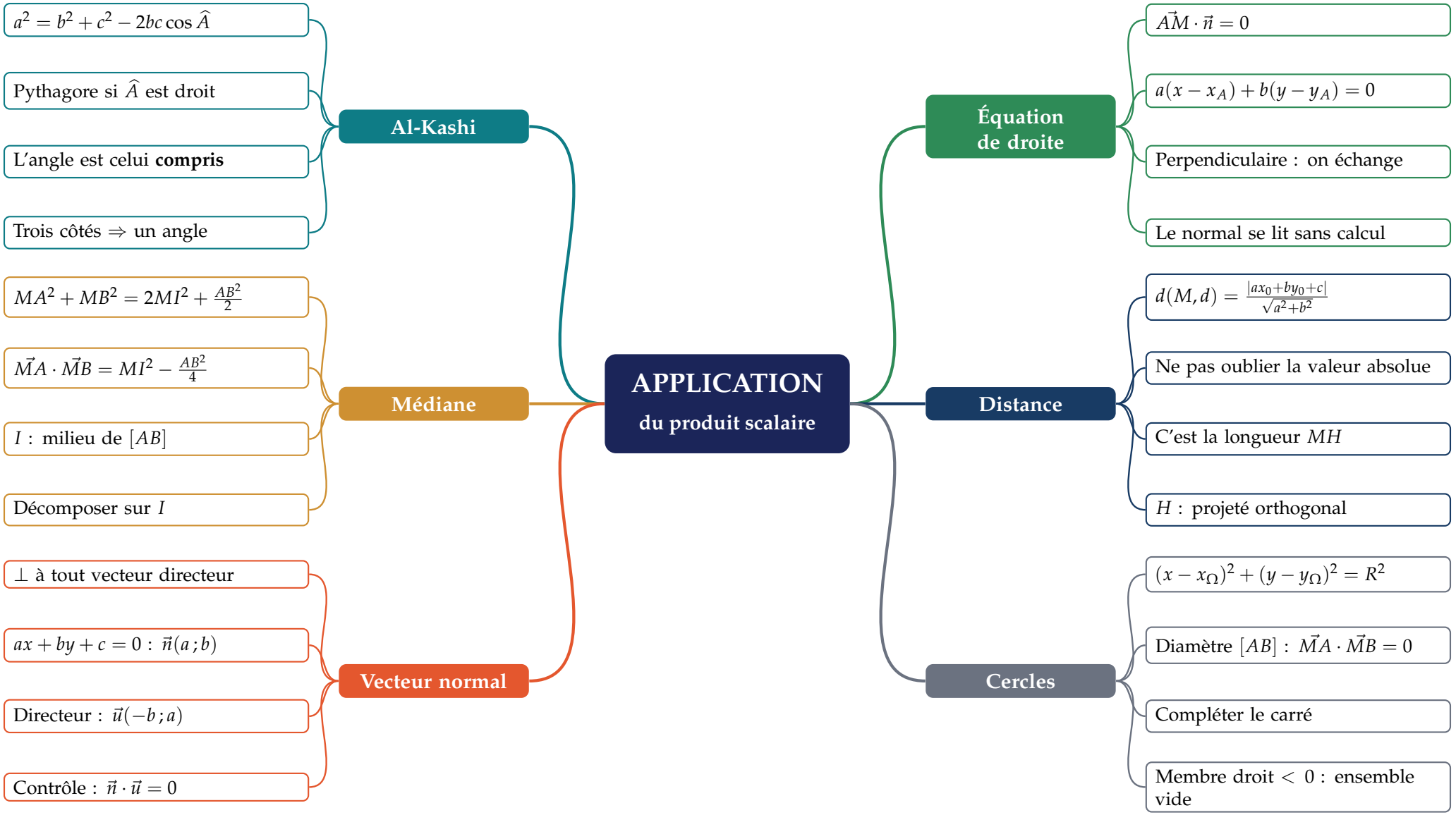
Les trois réflexes du chapitre

1. Al-Kashi est un Pythagore corrigé. Le terme $-2bc\cos\widehat{A}$ disparaît exactement quand l'angle est droit.

2. $ax+by+c=0$: le normal se lit directement. $\vec{n}(a\,;b)$, et le directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

3. Compléter le carré. C'est le geste qui transforme une équation développée en équation de cercle lisible.

Cercle de diamètre $[AB]$. $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$: la caractérisation la plus rapide, et celle qui relie tout le chapitre au précédent.



Chapitre 7 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.