Chapitre 8. Cours

Exponentielle

I. La fonction exponentielle

1. Définition

Théorème admis

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée exp. On note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, où $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$.

Propriété

Pour tout réel x : $\mathrm{e}^x > 0$, $\mathrm{e}^0 = 1$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Démonstration de la stricte positivité

Posons $g(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$. Alors, par dérivation d'un produit,

$$g'(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 0,$$

donc g est constante, égale à $g(0) = 1$. Ainsi $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} = 1$ pour tout x : l'exponentielle ne s'annule jamais. Comme elle est continue et vaut 1 en 0, elle garde le signe $+$ sur $\mathbb{R}$. ■

Attention

La notation e^x est un *nom*, pas une puissance ordinaire — mais elle en suit toutes les règles, ce qui est précisément ce que dit le théorème suivant. En revanche e^x n'est jamais nul : écrire « $\mathrm{e}^x = 0$ donc $x = \ldots$ » est une faute grave.

2. Relations fonctionnelles

Théorème

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b, \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}, \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}, \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}.$$

Démonstration de la première relation

Fixons b et posons $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x+b}}{\mathrm{e}^{x}}$. Sa dérivée vaut

$$h'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+b}\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x+b}\,\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x})^{2}} = 0,$$

donc h est constante, égale à $h(0) = \mathrm{e}^{b}$. Ainsi $\mathrm{e}^{x+b} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{b}$. ■

Exemple

Simplifier $A = \dfrac{\mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{4}}$ et $B = \left(\mathrm{e}^{3}\right)^{2} \times \mathrm{e}^{-5}$.

Solution. $A = \dfrac{\mathrm{e}^{5-2}}{\mathrm{e}^{4}} = \mathrm{e}^{3-4} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
$B = \mathrm{e}^{6} \times \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$.

II. Variations et courbe

Théorème

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

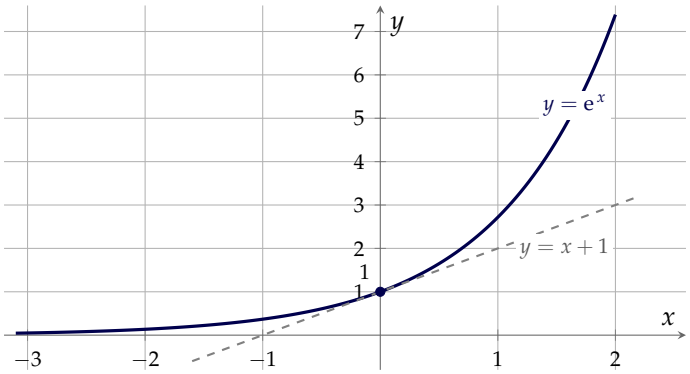
Sa dérivée est elle-même, donc strictement positive sur $\mathbb{R}$; le théorème du chapitre 4 conclut. ■

Propriété Conséquences pour les équations et inéquations

Pour tous réels a et b :

$$\mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \iff a = b, \qquad \mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b} \iff a < b.$$

C'est la stricte croissance qui autorise à « enlever les exponentielles » de part et d'autre — et à conserver le sens de l'inégalité.



9.1 — La courbe passe par $(0\,;1)$, reste au-dessus de l'axe des abscisses, et sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$.

Propriété

Pour tout réel x : $\mathrm{e}^{x} \geqslant x + 1$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

Démonstration

Posons $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
Or $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ équivaut à $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $x > 0$ par stricte croissance.
Donc φ décroît sur $]-\infty\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$: elle admet un minimum en 0, égal à $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
Ainsi $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout x, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$. ■

III. Dérivée de e^u

Théorème

Si u est dérivable sur un intervalle I, alors e^u l'est aussi et

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u.$$

En particulier, pour $u(x) = kx + b$: $\left(\mathrm{e}^{kx+b}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx+b}$.

Exemple

Dériver $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $h(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

Solution. $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x-1}$.
$g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
h est un produit : $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.

Méthode Étudier le signe d'une expression contenant e^u

L'exponentielle étant **strictement positive**, le signe d'un produit $A(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ est celui de $A(x)$ seul. C'est le réflexe qui simplifie presque toutes les études de fonctions de ce chapitre.

IV. Suites géométriques et exponentielle

Propriété

Pour tout réel a, la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est **géométrique** de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$.

Démonstration

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)a}}{\mathrm{e}^{na}} = \mathrm{e}^a$, quotient constant indépendant de n. ■

Réciproquement, une croissance ou une décroissance à taux constant — un capital placé, une population, une désintégration — se modélise indifféremment par une suite géométrique de raison $q > 0$ ou par une fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$. L'exponentielle est le passage du discret au continu.

V. Un exemple résolu complet

Rédaction modèle — Exercice type

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
2. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) < 0$.

Solution.

1. f est un produit uv avec $u(x) = x-2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$:

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x} + (x-2)\,\mathrm{e}^{x} = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}.$$

2. L'exponentielle est strictement positive : le signe de f' est celui de $x-1$, négatif avant 1 et positif après.
Donc f décroît sur $]-\infty\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$: elle admet un **minimum** en 1, égal à

$$f(1) = (1-2)\,\mathrm{e}^{1} = -\mathrm{e} \approx -2{,}718.$$

3. $f(0) = (0-2) \times \mathrm{e}^{0} = -2$ et $f'(0) = (0-1) \times \mathrm{e}^{0} = -1$.
L'équation de T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit

$$y = -x - 2.$$

4. $f(x) = 0$ équivaut à $(x-2)\,\mathrm{e}^{x} = 0$. Comme $\mathrm{e}^{x} \neq 0$ pour tout x, la règle du produit nul donne $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$. Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.
Pour l'inéquation, le signe de f est celui de $x-2$ (l'exponentielle étant positive) : $f(x) < 0$ si et seulement si $x < 2$.

$$\mathcal{S} =]-\infty\,;2[\,.$$

Contrôle. Le minimum $-\mathrm{e}$ est bien négatif, et il est atteint en $1 < 2$: cohérent avec le fait que f soit négative avant 2 ✓.

VI. Erreurs fréquentes et bons réflexes

✓ $\mathrm{e}^{x} > 0$ toujours : jamais de solution à $\mathrm{e}^{x} = 0$ ni à $\mathrm{e}^{x} = -3$.

✓ $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}$: on ajoute les exposants, on ne multiplie pas.

✓ $(\mathrm{e}^{u})' = u'\,\mathrm{e}^{u}$: ne jamais oublier le facteur u'.

✓ Pour le signe d'un produit avec une exponentielle, on ignore l'exponentielle.

✓ $\mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \iff a = b$: c'est la stricte croissance qui l'autorise.

✓ $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^{x})^{2}$, mais $\mathrm{e}^{x^{2}}$ n'a rien à voir avec ces deux-là.

VII. Module Python

```
from math import exp
# comparaison entre e^x et x + 1
for x in [-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2]:
  print(x, round(exp(x), 4), round(x + 1, 4),
        round(exp(x) - (x + 1), 4))
# suite geometrique associee
a = 0.7
print([round(exp(k * a), 4) for k in range(5)])
print(round(exp(a), 4))
```

Exemple — trace d'exécution

```
-1 0.3679 0 0.3679   -0.5 0.6065 0.5 0.1065   0 1.0 1 0.0
 0.5 1.6487 1.5 0.1487   1 2.7183 2 0.7183   2 7.3891 3 4.3891
 [1.0, 2.0138, 4.0552, 8.1662, 16.4446]   2.0138
```

Remarque — interprétation

La quatrième colonne est toujours positive ou nulle, et ne s'annule qu'en $x = 0$: c'est l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ vérifiée numériquement, avec son unique cas d'égalité. Elle croît très vite ensuite — la courbe s'écarte de sa tangente d'autant plus qu'on s'éloigne du point de contact.
La dernière ligne montre que chaque terme de la liste s'obtient du précédent en multipliant par $\mathrm{e}^{0,7} \approx 2{,}0138$: la suite $\left(\mathrm{e}^{0,7n}\right)$ est bien géométrique.

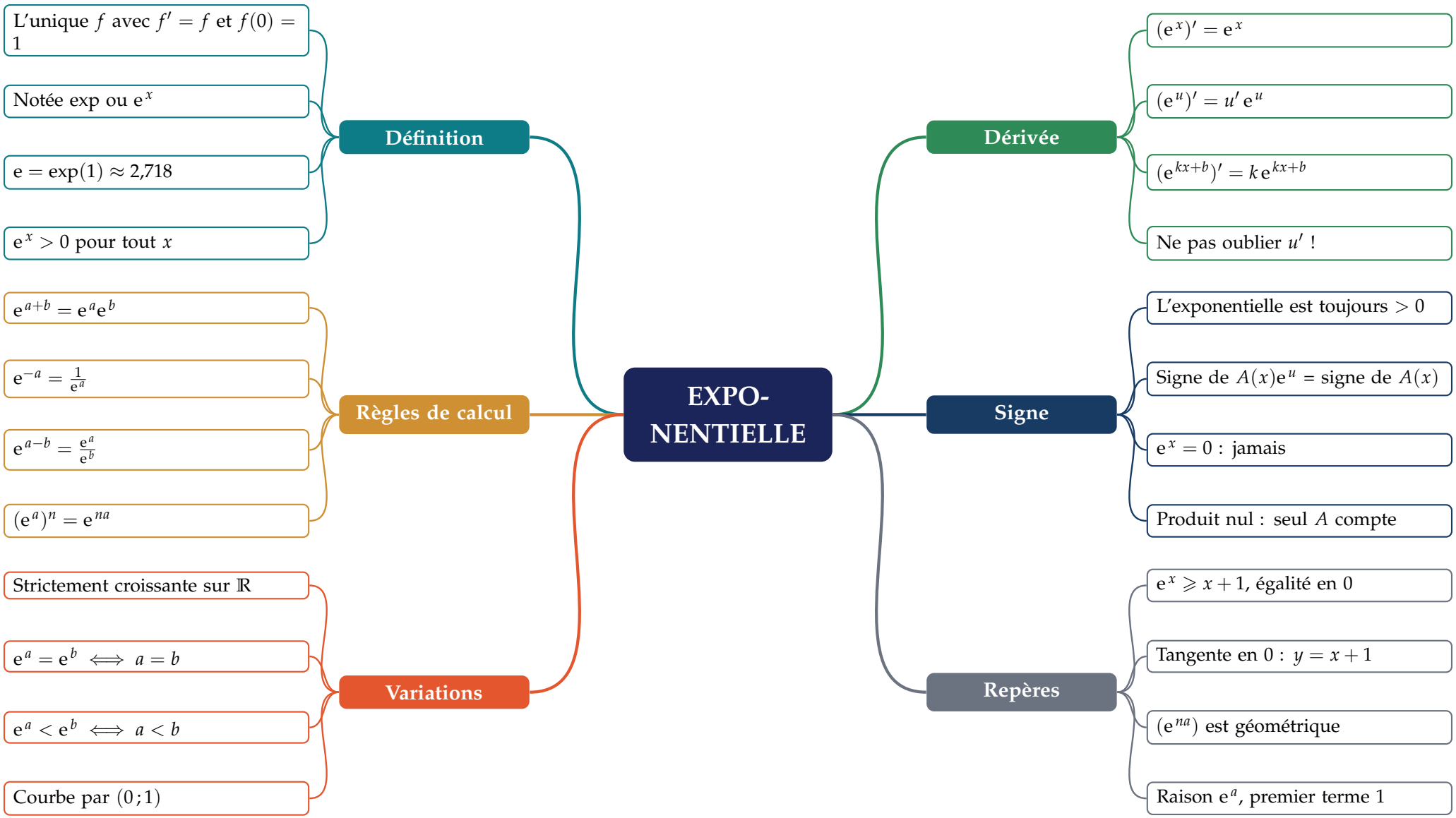
Les trois réflexes du chapitre

1. L'exponentielle est strictement positive. Elle ne s'annule jamais, et le signe d'un produit qui la contient est celui de l'autre facteur.

2. Elle transforme les sommes en produits. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$, et toutes les autres règles en découlent.

3. $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\,\mathrm{e}^u$**.** Le facteur u' est l'oubli le plus fréquent du chapitre.

Croissance stricte. Elle permet d'égaler ou de comparer les exposants, dans les équations comme dans les inéquations.



Chapitre 8 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.