DEVOIR SURVEILLÉ

Exponentielle

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (6 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants. Toute étude de signe doit exploiter la stricte positivité de l'exponentielle.

Exercice 1 — Calculs et résolutions (4 points)

1. Simplifier $A = \dfrac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^2}$ et $B = (\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{-2x}$.
2. Dériver $f(x) = \mathrm{e}^{5x-2}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x}$ et $h(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^7$ puis $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{3x}$.
4. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^{x+3}$.

Exercice 2 — Étude de fonction (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x$.

1. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
2. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
3. Donner la valeur exacte du maximum de f, puis une valeur approchée au centième.
4. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 3 — Une inégalité (5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe en justifiant par la stricte croissance de l'exponentielle.
2. Dresser le tableau de variations de g et donner son minimum.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, et préciser le cas d'égalité.
4. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 4 — Une décroissance (5 points)

La quantité de médicament présente dans le sang d'un patient, en milligrammes, est modélisée par

$$Q(t) = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}25\,t},$$

où t désigne le temps écoulé en heures depuis l'injection.

1. Calculer la quantité initiale et la quantité au bout de 4 heures, arrondie au dixième.
2. Calculer $Q'(t)$ et justifier que la quantité diminue au cours du temps.

3. Montrer que la suite $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner sa raison, arrondie au millième.
4. De quel pourcentage la quantité diminue-t-elle chaque heure ?
5. Le médicament reste actif tant que la quantité dépasse 20 mg. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures entières il cesse de l'être.