Chapitre 8. Fiche d'exercices n°1

Exponentielle

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Simplifier chaque expression.

a. $e^3 \times e^5$
b. $\dfrac{e^7}{e^2}$
c. $\left(e^2\right)^4$
d. $e^x \times e^{-x}$

Exercice 2 ⋆

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x) = e^{4x}$
b. $g(x) = e^{-3x+1}$
c. $h(x) = e^{x^2}$
d. $k(x) = 3e^x - 2x$

Exercice 3 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $e^x = e^3$
b. $e^{2x-1} = e^5$
c. $e^x = 0$
d. $e^{x^2} = e^4$

Exercice 4 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $e^x > e^2$ et $e^{3x} \leqslant e^6$.

Exercice 5 ⋆

Donner le signe de chaque expression sur $\mathbb{R}$.

a. $(x-3)\,e^x$
b. $-2e^{2x}$

Exercice 6 ⋆

Dériver $f(x) = x\,e^x$ puis $g(x) = (x+1)\,e^x$, et factoriser chaque résultat.

Exercice 7 ⋆

Écrire $\dfrac{e^{2x} \times e^3}{e^{x-1}}$ sous la forme e^{ax+b}.

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$.

a. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
b. Dresser le tableau de variations de f.
c. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x} - x$.

a. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
b. En déduire le minimum de g sur $\mathbb{R}$.
c. Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > x$.

Exercice 10 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} = 0$
b. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$ (poser $X = \mathrm{e}^{x}$)
c. $(\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} + 2) = 0$

Exercice 11 ⋆⋆

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a. Calculer $h'(x)$.
b. Dresser le tableau de variations de h et donner son maximum.
c. Justifier que h est paire.

Exercice 12 ⋆⋆

Une population de bactéries suit la loi $N(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}4t}$, où t est le temps en heures.

a. Calculer l'effectif initial et l'effectif au bout de 3 heures, arrondi à l'unité.
b. Montrer que la suite $(N(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner sa raison, arrondie au millième.
c. De quel pourcentage la population augmente-t-elle chaque heure ?

Exercice 13 ⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^{x}}{x^2}$.
b. Dresser le tableau de variations et donner le minimum de f.

Exercice 14 ⋆⋆

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ au point d'abscisse 0, puis étudier la position relative de la courbe et de cette tangente.

Exercice 15 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2-3x} \leqslant \mathrm{e}^{-2}$.

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ et en déduire les variations de f.

c. Montrer que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.

d. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout réel x.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^x$.

a. Calculer $f'(x)$ et le factoriser.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Déterminer les valeurs exactes des deux extremums locaux.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

La charge d'un condensateur, en volts, est donnée par $u(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-t/2}\right)$ pour $t \geqslant 0$ (en secondes).

a. Calculer $u(0)$ et $u(2)$, arrondi au centième.

b. Montrer que u est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. Résoudre $u(t) = 6$ et interpréter.

d. Montrer que $u(t) < 12$ pour tout $t \geqslant 0$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^n$.

a. Reconnaître une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

b. Exprimer S_n en fonction de n.

c. Calculer S_3, arrondi au centième.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Démontrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\mathrm{e}^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Indication : étudier successivement deux fonctions auxiliaires.