Chapitre 9. Cours

Variables aléatoires

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1. Définitions

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

On note $\{X = x_i\}$ l'événement « X prend la valeur x_i », et $P(X = x_i)$ sa probabilité.

Définition

La **loi de probabilité** de X est la donnée de toutes les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ prises par X et des probabilités associées $p_i = P(X = x_i)$. On la présente en tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Propriété

Les p_i sont positifs et leur somme vaut 1 : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

C'est le contrôle systématique de toute loi de probabilité : si la somme ne fait pas 1, une valeur est fausse ou une issue a été oubliée.

Exemple

On lance deux dés équilibrés et l'on note X le plus grand des deux résultats. Donner la loi de X.

Solution. Il y a 36 issues équiprobables. L'événement $\{X \leqslant k\}$ signifie que les deux dés donnent au plus k : il compte k^2 issues. Donc

$$P(X = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Contrôle : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$, donc la somme des probabilités vaut 1 ✓.

II. Espérance, variance, écart type

Définition

Soit X une variable aléatoire de loi $(x_i\,;p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- L'**espérance** de X est $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i = p_1x_1+\cdots+p_nx_n$.
- La **variance** de X est $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i-E(X)\big)^2$.
- L'**écart type** de X est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

L'espérance est la valeur moyenne que l'on obtiendrait en répétant un très grand nombre de fois l'expérience : c'est un *centre*. La variance et l'écart type mesurent la *dispersion* autour de ce centre. L'écart type a l'avantage d'être exprimé dans la même unité que X.

Théorème Formule de König-Huygens

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i^2\right)-\big(E(X)\big)^2=E\left(X^2\right)-\big(E(X)\big)^2.$$

Démonstration

En développant le carré dans la définition :

$$V(X)=\sum p_i\left(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)^2\right)=\sum p_ix_i^2-2E(X)\sum p_ix_i+E(X)^2\sum p_i.$$

Or $\sum p_ix_i=E(X)$ et $\sum p_i=1$, d'où $V(X)=E\left(X^2\right)-2E(X)^2+E(X)^2=E\left(X^2\right)-E(X)^2$. ■

Cette formule est presque toujours plus rapide à appliquer que la définition : elle évite de recalculer n différences.

Attention

La variance n'est jamais négative — c'est une somme de termes positifs. Un résultat négatif signale toujours une erreur de calcul, le plus souvent l'oubli du carré sur $E(X)$ dans la formule de König-Huygens.

Transformation affine

Théorème

Pour tous réels a et b :

$$E(aX+b)=a\,E(X)+b,\qquad V(aX+b)=a^2\,V(X),\qquad \sigma(aX+b)=|a|\,\sigma(X).$$

Démonstration

$E(aX+b)=\sum p_i(ax_i+b)=a\sum p_ix_i+b\sum p_i=aE(X)+b$.
Pour la variance, $aX+b-E(aX+b)=a\,(X-E(X))$, dont le carré vaut $a^2\,(X-E(X))^2$; en sommant avec les poids p_i on obtient $a^2V(X)$. ■

Remarque — pourquoi b disparaît de la variance

Ajouter une constante translate toutes les valeurs sans modifier leurs écarts mutuels : la dispersion est inchangée. Multiplier par a, en revanche, dilate les écarts d'un facteur $|a|$ — d'où le a^2 sur la variance et le $|a|$ sur l'écart type.

III. Échantillon et loi des grands nombres

Définition

Un **échantillon de taille** n de la variable aléatoire X est une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On appelle **moyenne de l'échantillon** la variable aléatoire

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Théorème

Si X a pour espérance μ et pour variance V, alors

$$E(M_n) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \frac{V}{n}, \qquad \text{donc} \qquad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

La moyenne d'un échantillon est donc centrée sur la même valeur que X, mais elle est $\sqrt{n}$ fois moins dispersée. C'est le contenu intuitif de la **loi des grands nombres** : plus l'échantillon est grand, plus sa moyenne se concentre autour de l'espérance.

Remarque — la racine carrée coûte cher

Diviser l'incertitude par 2 demande de multiplier la taille de l'échantillon par 4 ; la diviser par 10 demande de la multiplier par 100. C'est la raison pour laquelle les sondages restent imprécis même sur de gros échantillons.

IV. Un exemple résolu complet

Rédaction modèle — Exercice type

Une roue de loterie comporte 10 secteurs identiques : 1 secteur fait gagner 50 euros, 3 secteurs font gagner 10 euros, les autres ne rapportent rien. La partie coûte 8 euros.
On note G le gain algébrique du joueur (gain de la roue moins la mise).

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Calculer $E(G)$ et interpréter.
3. Calculer $V(G)$ et $\sigma(G)$.
4. Quelle mise rendrait le jeu équitable ?

Solution.
1. Les gains algébriques possibles sont $50 - 8 = 42$, $10 - 8 = 2$ et $0 - 8 = -8$.

g_i	-8	2	42
$P(G = g_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Contrôle : $\frac{6}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=1$ ✓.

2.

$$E(G)=\frac{6}{10}\times(-8)+\frac{3}{10}\times 2+\frac{1}{10}\times 42=\frac{-48+6+42}{10}=\frac{0}{10}=0.$$

L'espérance est nulle : le jeu est **équitable**. Sur un très grand nombre de parties, le joueur ne gagne ni ne perd en moyenne.

3. Par König-Huygens, puisque $E(G)=0$:

$$V(G)=E\left(G^2\right)-0=\frac{6}{10}\times 64+\frac{3}{10}\times 4+\frac{1}{10}\times 1\,764=\frac{384+12+1\,764}{10}=\frac{2\,160}{10}=216.$$

$$\sigma(G)=\sqrt{216}=6\sqrt{6}\approx 14{,}70 \text{ euros.}$$

4. Le jeu est déjà équitable pour une mise de 8 euros. En effet, l'espérance du gain *brut* vaut

$$\frac{1}{10}\times 50+\frac{3}{10}\times 10+\frac{6}{10}\times 0=\frac{50+30}{10}=8,$$

et la mise équitable est exactement cette espérance.
Commentaire. L'espérance nulle ne signifie pas que le jeu soit sans risque : l'écart type de près de 15 euros indique une forte dispersion. Le joueur perd 8 euros six fois sur dix, et l'essentiel de son espérance repose sur un gain rare de 42 euros.

V. Erreurs fréquentes et bons réflexes

✓ Vérifier que la somme des probabilités vaut 1 avant tout calcul.

✓ Pour un *gain algébrique*, ne pas oublier de retrancher la mise à chaque valeur.

✓ $V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$: le carré porte sur l'espérance entière.

✓ La variance est toujours positive ou nulle.

✓ $V(aX+b)=a^2V(X)$: le b disparaît, le a est au carré.

✓ L'écart type s'exprime dans l'unité de X ; la variance, dans son carré.

VI. Module Python

```
def esperance(valeurs, probas):
  return sum(v * p for v, p in zip(valeurs, probas))
def variance(valeurs, probas):
  m = esperance(valeurs, probas)
  return esperance([v*v for v in valeurs], probas) - m*m
g = [-8, 2, 42]
p = [0.6, 0.3, 0.1]
print(esperance(g, p), variance(g, p), round(variance(g, p)**0.5, 4))
# effet d'une transformation affine :  Y = 2G + 5
y = [2*v + 5 for v in g]
print(esperance(y, p), variance(y, p))
```

Exemple — trace d'exécution

```
0.0 216.0 14.6969
5.0 864.0
```

Remarque — interprétation

La première ligne retrouve les valeurs de l'exemple résolu. La seconde illustre le théorème de la transformation affine : $E(2G+5) = 2 \times 0 + 5 = 5$ ✓ et $V(2G+5) = 2^2 \times 216 = 864$ ✓. Le programme ne démontre rien, mais il vérifie instantanément une propriété que l'on vient d'établir — et signale une erreur de calcul en une seconde.

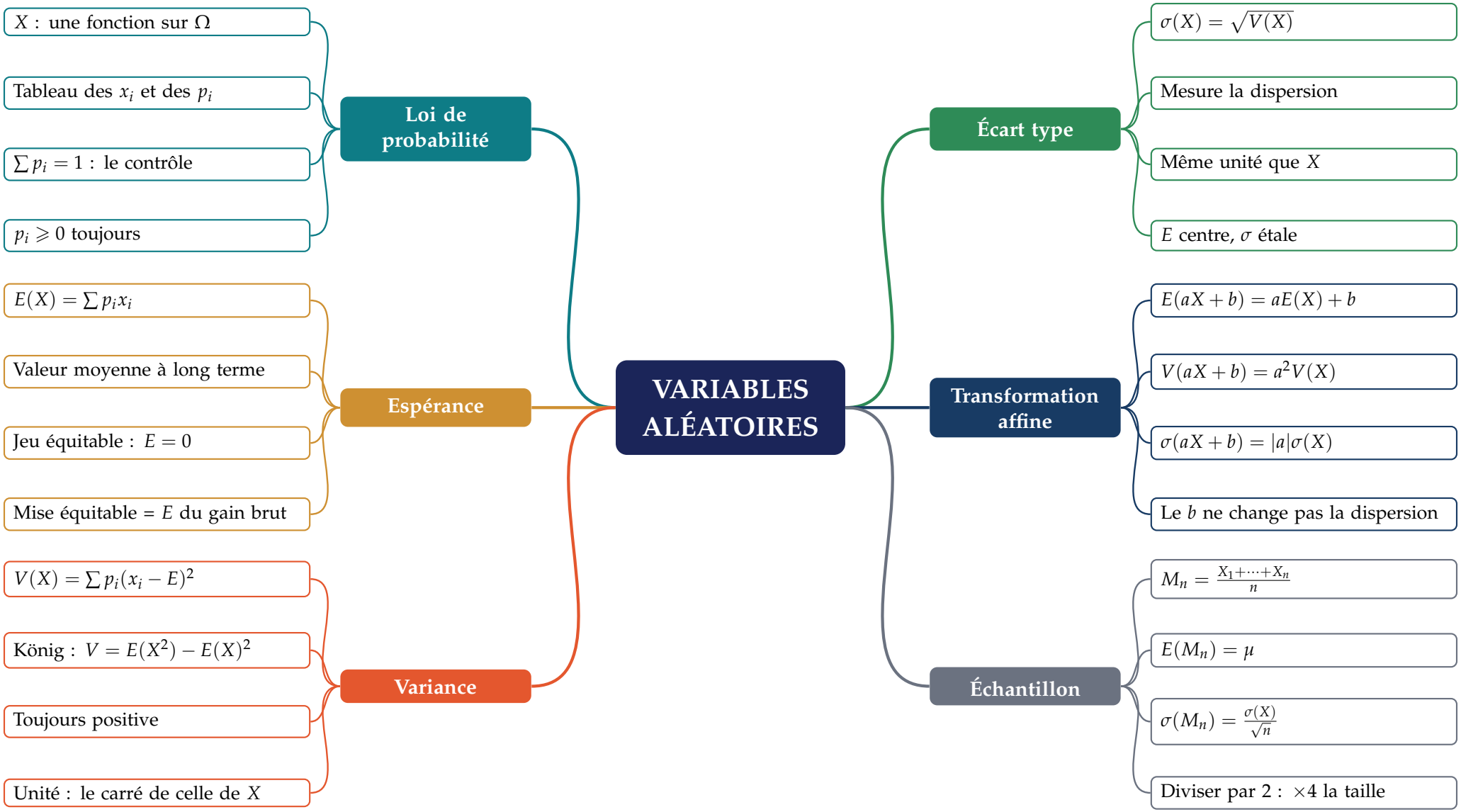
Les trois réflexes du chapitre

1. La somme des probabilités vaut 1. Ce contrôle attrape la plupart des erreurs de loi.

2. König-Huygens. $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$: plus rapide que la définition, et sans différences à recalculer.

3. Espérance nulle = jeu équitable. La mise équitable est exactement l'espérance du gain brut.

Échantillon. $E(M_n) = \mu$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$: la moyenne se concentre en $\sqrt{n}$, pas en n.



Chapitre 9 · Chaque branche renvoie à une section du cours et à une fiche méthode.