DEVOIR SURVEILLÉ

Variables aléatoires

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (6 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants. Toute loi de probabilité doit être accompagnée du contrôle de la somme.

Exercice 1 — Vrai / Faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. La variance d'une variable aléatoire peut être négative.
2. Si $E(X) = 0$, alors le jeu associé est équitable.
3. $V(X + 5) = V(X) + 5$.
4. Si l'on quadruple la taille d'un échantillon, l'écart type de sa moyenne est divisé par 2.

Exercice 2 — Un jeu de dés (6 points)

On lance un dé équilibré à six faces. Le joueur gagne 12 euros s'il obtient un 6, 3 euros s'il obtient un 4 ou un 5, et rien sinon. La partie coûte 4 euros.
On note G le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de G et vérifier la somme des probabilités.
2. Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer $V(G)$ par la formule de König-Huygens, puis $\sigma(G)$ arrondi au centième.
4. Déterminer la mise qui rendrait le jeu équitable.
5. Le joueur décide de doubler ses mises et ses gains. On note $H = 2G$. Calculer $E(H)$ et $\sigma(H)$ sans refaire de tableau.

Exercice 3 — Une urne (5 points)

Une urne contient 6 boules numérotées 1, 4 boules numérotées 4 et 2 boules numérotées 10. On tire une boule au hasard et X désigne le numéro obtenu.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. On pose $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$. Que valent $E(Y)$ et $\sigma(Y)$? Justifier sans calcul de loi.

Exercice 4 — Échantillonnage (5 points)

Le temps d'attente à un guichet, en minutes, est modélisé par une variable aléatoire X d'espérance $\mu = 6$ et d'écart type $\sigma = 3$. On observe un échantillon de n clients et l'on note M_n le temps d'attente moyen.

1. Que valent $E(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de n ?
2. Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 9$, $n = 36$ et $n = 225$.
3. À partir de quelle taille d'échantillon a-t-on $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}25$?
4. Expliquer pourquoi il est bien plus coûteux de gagner en précision au-delà d'une certaine taille.