Chapitre 9. Fiche d'exercices n°1

Variables aléatoires

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

La variable X prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités 0,2, 0,5 et p. Déterminer p.

Exercice 2 ⋆

Calculer $E(X)$ pour la loi : $x_i \in \{-1\,;0\,;3\}$ avec $p_i \in \{0{,}3\,;0{,}5\,;0{,}2\}$.

Exercice 3 ⋆

Pour la loi de l'exercice 2, calculer $E\left(X^2\right)$ puis $V(X)$ par la formule de König-Huygens.

Exercice 4 ⋆

On donne $E(X) = 4$ et $V(X) = 9$. Calculer $\sigma(X)$, puis $E(3X-2)$, $V(3X-2)$ et $\sigma(3X-2)$.

Exercice 5 ⋆

On lance un dé équilibré et X désigne le résultat. Donner $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 6 ⋆

Un jeu rapporte 5 euros avec probabilité 0,3 et fait perdre 2 euros sinon. Calculer l'espérance de gain.

Exercice 7 ⋆

On donne $\sigma(X) = 6$ et un échantillon de taille $n = 36$. Calculer $\sigma\left(M_{36}\right)$.

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

Une urne contient 4 boules marquées 1, 3 boules marquées 2 et 3 boules marquées 5. On tire une boule au hasard et X est le numéro obtenu.

a. Donner la loi de X et vérifier la somme des probabilités.
b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 9 ⋆⋆

Un jeu consiste à lancer deux pièces équilibrées. On gagne 6 euros si l'on obtient deux piles, 1 euro si l'on obtient exactement un pile, rien sinon. La partie coûte 2 euros.

a. Donner la loi du gain algébrique G.
b. Calculer $E(G)$: le jeu est-il favorable au joueur ?
c. Calculer $\sigma(G)$, arrondi au centième.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit X de loi : $x_i \in \{1\,;2\,;3\,;4\}$ avec $p_i \in \{0{,}1\,;0{,}2\,;0{,}3\,;0{,}4\}$.

a. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b. On pose $Y = 5X - 3$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ sans recalculer de loi.

Exercice 11 ⋆⋆

On lance deux dés équilibrés et S désigne la somme obtenue.

a. Donner la loi de S.

b. Calculer $E(S)$ et interpréter.

c. Calculer $P(S \geqslant 10)$.

Exercice 12 ⋆⋆

Une compagnie d'assurance propose un contrat à 120 euros par an. Elle estime qu'un client déclare un sinistre de 2 000 euros avec probabilité 0,04, et aucun sinistre sinon. Soit B le bénéfice de la compagnie pour un contrat.

a. Donner la loi de B.

b. Calculer $E(B)$ et interpréter.

c. Quel prix minimal devrait-elle fixer pour que l'espérance de bénéfice soit positive ?

Exercice 13 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et d'écart type 2.

a. Déterminer a et b tels que $Y = aX + b$ ait pour espérance 0 et pour écart type 1, avec $a > 0$.

b. Vérifier le résultat.

Exercice 14 ⋆⋆

Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On en tire deux simultanément et X désigne le plus petit numéro obtenu.

a. Justifier qu'il y a 10 tirages possibles équiprobables.

b. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 15 ⋆⋆

Une variable X a pour espérance $\mu = 50$ et pour écart type $\sigma = 12$. On prélève un échantillon de taille n.

a. Calculer $\sigma\left(M_n\right)$ pour $n = 9$, $n = 100$ et $n = 400$.

b. À partir de quelle taille l'écart type de la moyenne devient-il inférieur à 1 ?

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Un jeu coûte m euros. On tire une carte d'un jeu de 32 : un as rapporte 20 euros, une figure 5 euros, une autre carte rien.

a. Exprimer l'espérance du gain algébrique en fonction de m.

b. Déterminer la mise rendant le jeu équitable.

c. Pour $m = 5$, calculer l'écart type du gain, arrondi au centième.

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus en lançant trois pièces équilibrées.

a. Donner la loi de X.
b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
c. Comparer avec $3 \times \frac{1}{2}$ et $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et 1 avec $P(X = 1) = p$.

a. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X) = p(1 - p)$.
b. Étudier la fonction $p \mapsto p(1 - p)$ sur $[0\,;1]$ et déterminer la valeur de p qui maximise la variance.
c. Interpréter ce résultat.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Une machine produit des pièces dont la masse, en grammes, est modélisée par une variable X d'espérance 250 et d'écart type 4. On prélève un échantillon de 64 pièces.

a. Calculer $E\left(M_{64}\right)$ et $\sigma\left(M_{64}\right)$.
b. Un contrôle rejette le lot si la masse moyenne s'écarte de plus de 1 gramme de 250. Cet écart correspond à combien d'écarts types de M_{64} ?
c. Même question pour un échantillon de 16 pièces. Commenter.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit X de loi : $x_i \in \{1\,;2\,;a\}$ avec $p_i \in \{0{,}5\,;0{,}3\,;0{,}2\}$, où a est un réel.

a. Exprimer $E(X)$ en fonction de a.
b. Déterminer a pour que $E(X) = 3$.
c. Pour cette valeur de a, calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.