Chapitre 1. Activité d'introduction

Tartaglia et la naissance des nombres complexes

Nombres complexes — lecture, exemples d'application et exercices

1. Un peu d'histoire : l'équation du troisième degré

Au début du XVI^{e} siècle, en pleine Renaissance italienne, les algébristes se lancent des défis publics : résoudre des équations. Scipione del Ferro, puis Niccolò Fontana, dit **Tartaglia** (« le bègue »), découvrent une méthode pour résoudre les équations du troisième degré de la forme

$$x^3 + px + q = 0, \qquad p \text{ et } q \text{ réels donnés, } x \text{ inconnue réelle.}$$

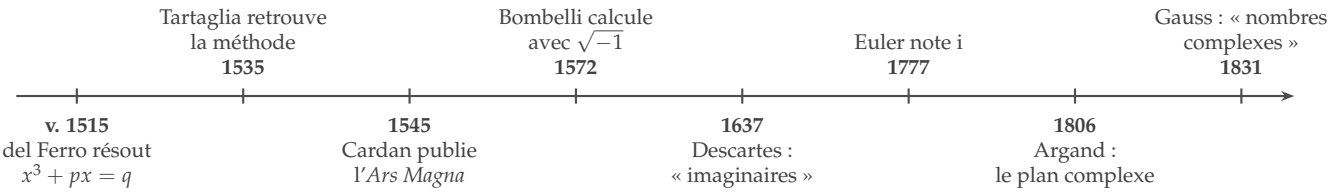
Tartaglia confie sa méthode à Jérôme **Cardan** sous serment de secret ; en 1545, Cardan la publie néanmoins dans son *Ars Magna*. La voici :

Théorème — Formule de Tartaglia

Le nombre

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (lorsque les racines carrées écrites existent).



2. La méthode de Tartaglia : ramener le degré 3 au degré 2

On cherche une solution réelle de l'équation (E) : $x^3 + px + q = 0$.

Étape 1 — Une identité remarquable. Pour tous réels u et v,

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u+v).$$

Étape 2 — Décomposer l'inconnue. Tartaglia écrit $x = u + v$, où u et v sont deux nombres à déterminer. En remplaçant dans (E) :

$$x^3 + px + q = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = \big(u^3 + v^3 + q\big) + (3uv + p)(u+v). \qquad (*)$$

Il *suffit* donc de trouver u et v annulant les deux parenthèses :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Étape 3 — Un système « somme–produit ». Posons $U = u^3$ et $V = v^3$. En élevant au cube la seconde égalité :

$$\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$. Ici, U et V sont donc les solutions de l'équation du **second degré**

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0, \qquad \text{de discriminant} \quad \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Étape 4 — Remonter à x. Lorsque $\Delta \geqslant 0$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ et

$$U = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad V = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Enfin $u = \sqrt[3]{U}$, $v = \sqrt[3]{V}$ (tout réel admet une unique racine cubique réelle) et $x = u + v$: c'est la formule de Tartaglia. On vérifie au passage que $uv = \sqrt[3]{UV} = \sqrt[3]{-p^3/27} = -\frac{p}{3}$, comme il se doit.

Remarque — Ce que dit le signe de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

- S'il est **strictement positif**, la formule s'applique directement et l'équation (E) a une *unique* solution réelle.
- S'il est **nul**, $U = V = -\frac{q}{2}$ et la formule donne $x = 2\sqrt[3]{-q/2}$; l'équation a une solution double.
- S'il est **strictement négatif**, la formule fait apparaître la racine carrée d'un nombre négatif… alors même que l'équation possède *trois* solutions réelles ! C'est le « cas irréductible », que Tartaglia osera affronter (partie 4).

3. Exemples d'application de la méthode

Exemple 1 — $x^3 + 6x = 20$

On écrit $x^3 + 6x - 20 = 0$: $p = 6$ et $q = -20$. Alors

$$-\frac{q}{2} = 10 \qquad \text{et} \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 100 + \frac{216}{27} = 100 + 8 = 108.$$

La formule donne, puisque $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$:

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}.$$

Cette écriture cache un nombre très simple. En effet, par l'identité $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$$(1 + \sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3 \times 3 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3} \qquad \text{et de même} \qquad (1 - \sqrt{3})^3 = 10 - 6\sqrt{3}.$$

Donc $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$, et $x = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = \mathbf{2}$.
Contrôle : $2^3 + 6 \times 2 = 8 + 12 = 20$ ✓. C'est d'ailleurs la seule solution réelle : $x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + 2x + 10)$ et le trinôme $x^2 + 2x + 10$ a un discriminant négatif ($4 - 40 = -36$).

Exemple 2 — $x^3 = 3x + 2$

On écrit $x^3 - 3x - 2 = 0$: $p = -3$ et $q = -2$. Alors

$$-\frac{q}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 1 + \frac{-27}{27} = 1 - 1 = 0.$$

La formule donne $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{0}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{0}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 1+1 = \mathbf{2}$.
Contrôle : $2^3 = 8$ et $3\times 2 + 2 = 8$ ✓.
Ici $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$: on est dans le cas de la solution double. En effet

$$x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 \quad \text{(développer pour le vérifier)},$$

donc l'équation a pour solutions 2 et -1, cette dernière étant « double ». La formule ne fournit qu'une solution ; les autres s'obtiennent en factorisant par $(x-2)$.

Exemple 3 — $x^3 = 15x + 4$

On écrit $x^3 - 15x - 4 = 0$: $p = -15$ et $q = -4$. Alors

$$-\frac{q}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 + \frac{-3375}{27} = 4 - 125 = -121 < 0.$$

Appliquée « littéralement », la formule s'écrit

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}},$$

en osant écrire $\sqrt{-121} = \sqrt{121}\times\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$. Cette écriture n'a, a priori, aucun sens : aucun réel n'a pour carré -1. Pourtant, l'équation a bien une solution évidente, $x = 4$: $4^3 = 64 = 15\times 4 + 4$ ✓. Tartaglia poursuit alors le calcul (partie 4).

4. Tartaglia, l'audace de calculer avec $\sqrt{-1}$

Tartaglia décide alors de manipuler le symbole $\sqrt{-1}$ comme un nombre ordinaire, en lui imposant une seule règle : $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Il en déduit $\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, puis calcule, avec l'identité du cube :

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 3\times 4\times\sqrt{-1} + 3\times 2\times\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1},$$
$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 3\times 4\times\sqrt{-1} + 3\times 2\times\left(\sqrt{-1}\right)^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Ainsi $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1}$ et $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2-\sqrt{-1}$, et la formule de Tartaglia donne

$$x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4,$$

qui est bien la solution attendue. Les « nombres impossibles » se sont éliminés en chemin, mais sans eux le calcul était bloqué : c'est l'acte de naissance des **nombres complexes**. Descartes les qualifiera d'*imaginaires* en 1637, non sans méfiance.

Attention — Le piège de la notation $\sqrt{-1}$

Jusqu'au début du XIX^{e} siècle, les deux racines carrées de -1 furent notées $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Cette notation conduit à des contradictions. Calculons $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ de deux façons :

- par la définition d'une racine carrée : $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$;
- par la règle $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$: $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Le symbole $\sqrt{\ }$ incite à appliquer une règle qui n'est valable que pour des réels *positifs*. Pour éviter ce type d'erreur, Euler propose en 1777 de remplacer $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ par i et $-$i : ainsi $\mathrm{i}^2 = -1$ et $(-\mathrm{i})^2 = -1$. Cette notation, reprise par Gauss, est toujours utilisée. **On n'écrit jamais $\sqrt{-1}$.**

Définition — Ce que nous allons construire

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, dans lequel on calcule avec les règles habituelles (commutativité, distributivité…). Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit $a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels : Tartaglia calculait déjà avec $2 + \mathrm{i}$ et $2 - \mathrm{i}$. Le chapitre 1 construit rigoureusement cet ensemble et ses outils.

Exercices

Exercice 1

On considère l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$.

a. Identifier p et q, puis calculer $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Écrire la solution fournie par la formule de Tartaglia.

b. Développer $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$.

c. En déduire la valeur exacte de la solution obtenue en **a**, puis la vérifier dans l'équation.

d. Factoriser $x^3 + 3x - 4$ par $(x - 1)$ et montrer que l'équation n'a pas d'autre solution réelle.

Exercice 2

On considère l'équation $x^3 = 6x + 4$.

a. Se ramener à la forme $x^3 + px + q = 0$ et calculer $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Que se passe-t-il ?

b. À la manière de Tartaglia, écrire la solution fournie par la formule à l'aide du symbole i (avec $\mathrm{i}^2 = -1$).

c. Calculer $(-1 + \mathrm{i})^3$ et $(-1 - \mathrm{i})^3$ en utilisant la règle $\mathrm{i}^2 = -1$.

d. En déduire une solution réelle de l'équation, puis la vérifier.

e. Factoriser $x^3 - 6x - 4$ et déterminer toutes les solutions réelles de l'équation. Combien y en a-t-il ? Commenter à l'aide de la remarque de la partie 2.

Exercice 3

Toute équation de degré 3 peut se ramener à la forme $x^3 + px + q = 0$: on « supprime » le terme en x^2 par un changement de variable. On considère l'équation $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$.

a. Poser $x = t + 1$ et montrer que l'équation devient $t^3 + 3t - 4 = 0$.

b. En déduire, à l'aide de l'exercice 1, une solution de l'équation de départ, et la vérifier.