Chapitre 1. Cours

Les nombres complexes

Point de vue algébrique · point de vue géométrique

Remarque — Pourquoi de nouveaux nombres ?

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution : un carré n'est jamais négatif. Les nombres complexes prolongent $\mathbb{R}$ par un nombre i dont le carré vaut -1. On y gagne bien plus qu'une solution : *toute* équation polynomiale y possède des racines, et le plan tout entier devient un lieu de calcul.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

Théorème 1.1 — Existence de $\mathbb{C}$ (admis)

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: tout réel est un nombre complexe ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul (commutativité, associativité, distributivité) ;
- il existe un élément $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des **nombres complexes**.

Définition 1.2 — Forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Cette écriture est la **forme algébrique** de z.

- a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$; b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- z est **réel** si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$; z est **imaginaire pur** si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Attention : la partie imaginaire est le réel b, et non $\mathrm{i}b$.

Propriété 1.3 — Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \iff a = a' \text{ et } b = b' \qquad (a, b, a', b' \in \mathbb{R}).$$

En particulier $a + \mathrm{i}b = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$. C'est l'unicité de la forme algébrique qui rend ce résultat vrai.

Exercice d'application 1

Déterminer les réels x et y tels que $(3x + y) + \mathrm{i}(x - y) = 5 + 3\mathrm{i}$.

Solution. On identifie parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

En additionnant, $4x = 8$, donc $x = 2$, puis $y = x - 3 = -1$.
Contrôle : $3 \times 2 - 1 = 5$ ✓ et $2 - (-1) = 3$ ✓. Donc $x = 2$ et $y = -1$.

Propriété 1.4 — Les puissances de i

$\mathrm{i}^0 = 1,\ \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4 = 1$, puis les valeurs se répètent avec une période 4 : pour tout entier naturel n, i^n ne dépend que du reste de n dans la division par 4.

Exercice d'application 2

Simplifier $\mathrm{i}^{39},\ \mathrm{i}^{2025},\ (2\mathrm{i})^3$ ***et*** $(1+\mathrm{i})^4$**.**

Solution. $39 = 4 \times 9 + 3$, donc $\mathrm{i}^{39} = \left(\mathrm{i}^4\right)^9 \times \mathrm{i}^3 = 1 \times (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.
$2025 = 4 \times 506 + 1$, donc $\mathrm{i}^{2025} = \mathrm{i}$. $(2\mathrm{i})^3 = 8\,\mathrm{i}^3 = -8\mathrm{i}$.
$(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$.

2. Opérations : somme, produit, conjugué, quotient

Propriété 2.1 — Somme et produit

Pour $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ (formes algébriques) et k réel :

$$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b'), \qquad kz = ka + \mathrm{i}kb, \qquad zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b).$$

On calcule comme avec des réels, en remplaçant i^2 par -1 dès qu'il apparaît.

Exercice d'application 3

Mettre sous forme algébrique $(3-2\mathrm{i})(5+7\mathrm{i}),\ (3+5\mathrm{i})^2$ ***et*** $(5-4\mathrm{i})(5+4\mathrm{i})$**.**

Solution. $(3-2\mathrm{i})(5+7\mathrm{i}) = 15 + 21\mathrm{i} - 10\mathrm{i} - 14\mathrm{i}^2 = 15 + 11\mathrm{i} + 14 = 29 + 11\mathrm{i}$.
$(3+5\mathrm{i})^2 = 9 + 30\mathrm{i} + 25\mathrm{i}^2 = 9 + 30\mathrm{i} - 25 = -16 + 30\mathrm{i}$.
$(5-4\mathrm{i})(5+4\mathrm{i}) = 25 - (4\mathrm{i})^2 = 25 - 16\mathrm{i}^2 = 25 + 16 = 41$: le produit d'un complexe par son conjugué est un réel.

Définition 2.2 — Conjugué

Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

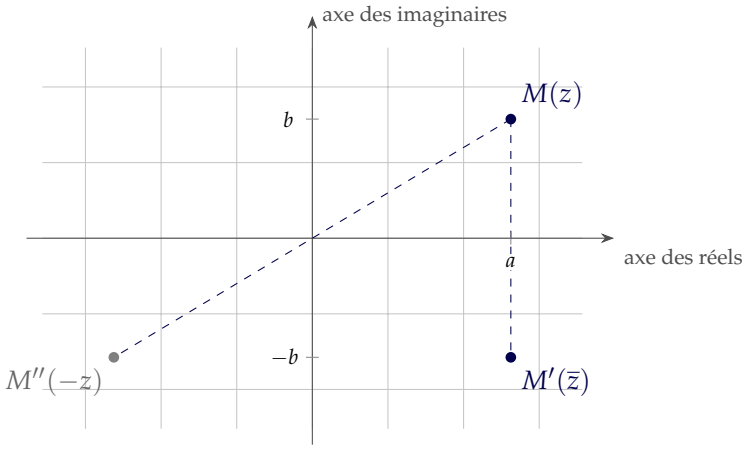


Figure 1 — $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels ; $M(z)$ et $M''(-z)$ par rapport à l'origine.

Propriété 2.3 — Règles du conjugué

Pour tous complexes z et z', et tout entier naturel n :

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \ (z' \neq 0).$$

De plus, si $z = a + \mathrm{i}b$:

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+, \qquad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z),$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z, \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z.$$

Démonstration — Deux de ces règles

$z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2b^2 = a^2 + b^2$.
$\overline{zz'}$: on a $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$, donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + a'b)$; et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') = aa' - \mathrm{i}ab' - \mathrm{i}a'b + \mathrm{i}^2bb' = (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + a'b)$. Les deux expressions coïncident. ■

Méthode 2.4 — Écrire un quotient sous forme algébrique

On multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué du dénominateur** : le nouveau dénominateur $z'\overline{z'} = a'^2 + b'^2$ est un réel strictement positif.

$$\frac{4+3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \frac{(4+3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \frac{20 - 8\mathrm{i} + 15\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2}{25+4} = \frac{26+7\mathrm{i}}{29} = \frac{26}{29} + \frac{7}{29}\,\mathrm{i}.$$

Cas particulier de l'inverse : $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$, par exemple $\dfrac{1}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{5-2\mathrm{i}}{29}$.

Exercice d'application 4

Écrire sous forme algébrique $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$ ***et*** $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

Solution. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{9+4} = \dfrac{6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{13} = \dfrac{8-\mathrm{i}}{13} = \dfrac{8}{13} - \dfrac{1}{13}\mathrm{i}$.
$\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1+1} = \dfrac{\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

3. Équations dans $\mathbb{C}$

Méthode 3.1 — Équations du premier degré

- *Équation produit* : $(z-\mathrm{i})(2z+\mathrm{i}) = 0 \iff z = \mathrm{i}$ ou $z = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ — un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, comme dans $\mathbb{R}$.
- *Équation où figure* $\overline{z}$: on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et l'on identifie les parties réelles et imaginaires.

Exercice d'application 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ ***l'équation*** $\overline{z} = 3z - 1 - 5\mathrm{i}$.

Solution. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels. L'équation s'écrit $x - \mathrm{i}y = 3x + 3\mathrm{i}y - 1 - 5\mathrm{i}$, soit

$$\begin{cases} x = 3x - 1 \\ -y = 3y - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

L'unique solution est $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}\mathrm{i}$.
Contrôle : $3z - 1 - 5\mathrm{i} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{15}{4}\mathrm{i} - 1 - 5\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}\mathrm{i} = \overline{z}$ ✓.

Théorème 3.2 — Équation du second degré à coefficients réels

Soit a, b, c réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: une unique solution réelle $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: deux solutions **complexes conjuguées**

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ (avec $z_1 = z_2 = z_0$ si $\Delta = 0$).

Démonstration — Le cas $\Delta < 0$

La forme canonique donne, pour tout complexe z :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ et $\dfrac{\Delta}{4a^2} = -\dfrac{-\Delta}{4a^2} = \mathrm{i}^2\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$. Donc

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(z+\frac{b}{2a}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est : les solutions sont $z = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$, conjuguées l'une de l'autre. ■

Exercice d'application 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ ***:*** ***(a)*** $z^2-2z+5=0$ ***;*** ***(b)*** $3z^2+2z+4=0$ ***;*** ***(c)*** $2z^2+3=0$.

Solution. (a) $\Delta = 4-20 = -16 < 0$, $\sqrt{16}=4$: $z = \dfrac{2\pm 4\mathrm{i}}{2}$, soit $\mathcal{S} = \{1-2\mathrm{i}\,;1+2\mathrm{i}\}$.
Contrôle : $(1+2\mathrm{i})^2 - 2(1+2\mathrm{i}) + 5 = 1+4\mathrm{i}-4-2-4\mathrm{i}+5 = 0$ ✓.
(b) $\Delta = 4-48 = -44 < 0$, $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$: $z = \dfrac{-2\pm 2\mathrm{i}\sqrt{11}}{6}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{11}}{3}\,;\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{11}}{3}\right\}$.
(c) $z^2 = -\dfrac{3}{2} = \mathrm{i}^2\dfrac{3}{2}$, donc $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \pm\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{2}$: $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{2}\,;\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Attention — Ce que le théorème ne dit pas

Il ne s'applique qu'aux coefficients *réels*. Avec des coefficients complexes, les racines existent toujours mais ne sont plus conjuguées : $z^2-2\mathrm{i}z-1 = (z-\mathrm{i})^2$ a pour unique racine i, et $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ n'en est pas une.

4. Formule du binôme et polynômes

Théorème 4.1 — Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Les coefficients $\binom{n}{k}$ se lisent dans le triangle de Pascal : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démonstration — Par récurrence sur n (exigible)

Soit $P(n)$ la formule ci-dessus.
Initialisation. Pour $n = 0$: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0$. $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $P(k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Alors

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k+1-j}b^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^{j+1}.$$

Dans la seconde somme on pose $j' = j+1$: elle devient $\displaystyle\sum_{j'=1}^{k+1}\binom{k}{j'-1}a^{k+1-j'}b^{j'}$. En regroupant les termes de même degré en b :

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]a^{k+1-j}b^j + \binom{k}{k}b^{k+1}.$$

D'après la relation de Pascal, $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$; et $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1$, $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$. On obtient exactement $P(k+1)$.
Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. ■

Exercice d'application 7

Développer $(z+\mathrm{i})^5$**.**

Solution. La ligne $n = 5$ du triangle de Pascal est $1, 5, 10, 10, 5, 1$, donc

$$(z+\mathrm{i})^5 = z^5 + 5z^4\mathrm{i} + 10z^3\mathrm{i}^2 + 10z^2\mathrm{i}^3 + 5z\,\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 = z^5 + 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathrm{i}z^2 + 5z + \mathrm{i}.$$

Définition 4.2 — Polynôme, racine

Une **fonction polynôme** de degré $n \geqslant 1$ est définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, avec $a_0, \ldots, a_n$ réels et $a_n \neq 0$. Un complexe α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.
Exemple : i est racine de $z^4 + 2z^2 + 1$, car $\mathrm{i}^4 + 2\mathrm{i}^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

Théorème 4.3 — Factorisation de $z^n - a^n$

Pour tous complexes z et a et tout entier $n \geqslant 1$:

$$z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + z\,a^{n-2} + a^{n-1}\right) = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1}z^{n-1-k}a^k.$$

Démonstration

On développe le membre de droite :

$$(z-a)\left(z^{n-1} + z^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right) = \underbrace{z^n + z^{n-1}a + \cdots + z\,a^{n-1}}_{\text{produit par } z}\ \underbrace{- z^{n-1}a - \cdots - z\,a^{n-1} - a^n}_{\text{produit par } -a}.$$

Tous les termes intermédiaires se compensent deux à deux : il reste $z^n - a^n$. ■

Théorème 4.4 — Factorisation par $z-\alpha$

Si α est une racine du polynôme P de degré $n \geqslant 1$, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$P(z) = (z-\alpha)\,Q(z) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Démonstration — Exigible

Comme $P(\alpha) = 0$, on a $P(z) = P(z) - P(\alpha) = a_n\left(z^n - \alpha^n\right) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - \alpha^{n-1}\right) + \cdots + a_1(z-\alpha)$. D'après le théorème 4.3, chaque différence $z^k - \alpha^k$ ($1 \leqslant k \leqslant n$) se factorise par $(z-\alpha)$: $z^k - \alpha^k = (z-\alpha)Q_{k-1}(z)$ avec Q_{k-1} de degré $k-1$. Donc

$$P(z) = (z-\alpha)\left[a_n Q_{n-1}(z) + a_{n-1}Q_{n-2}(z) + \cdots + a_1\right] = (z-\alpha)\,Q(z),$$

et Q est de degré $n-1$ car $a_n \neq 0$. ■

Théorème 4.5 — Nombre de racines

Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet **au plus** n **racines** distinctes.

Démonstration — Exigible

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des racines deux à deux distinctes de P. Par le théorème 4.4, $P(z) = (z-\alpha_1)Q_1(z)$. Comme $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ et $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$, on a $Q_1(\alpha_2) = 0$, donc $Q_1(z) = (z-\alpha_2)Q_2(z)$, et ainsi de suite. Finalement

$$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_k)\,Q_k(z),$$

ce qui impose $n = \deg P = k + \deg Q_k \geqslant k$. ■

Méthode 4.6 — Résoudre une équation de degré 3 avec une racine évidente

1. Chercher une racine évidente α parmi $0, \pm 1, \pm 2, \pm \mathrm{i}\ldots$ en calculant $P(\alpha)$.
2. Écrire $P(z) = (z-\alpha)(az^2+bz+c)$, développer, et **identifier** les coefficients.
3. Résoudre l'équation du second degré obtenue.

Exercice d'application 8

Soit $P(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$***. Montrer que*** -2 ***est racine de*** P***, factoriser, puis résoudre*** $P(z) = 0$.

Solution. $P(-2) = -8 + 16 - 12 + 4 = 0$: -2 est racine.
On cherche a, b, c tels que $P(z) = (z+2)(az^2+bz+c) = az^3 + (2a+b)z^2 + (2b+c)z + 2c$. Par identification : $a = 1$; $2a + b = 4$ donc $b = 2$; $2c = 4$ donc $c = 2$; contrôle du terme en z : $2b + c = 6$ ✓. Ainsi $P(z) = (z+2)\left(z^2 + 2z + 2\right)$.
$z^2 + 2z + 2 = 0$: $\Delta = 4 - 8 = -4$, $z = \dfrac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}$.
$\mathcal{S} = \{-2\,; -1 - \mathrm{i}\,; -1 + \mathrm{i}\}$ — trois racines pour un degré 3, conformément au théorème 4.5.

Propriété 4.7 — Racines conjuguées

Si P est un polynôme *à coefficients réels* et si α est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

Démonstration

$P(\overline{\alpha}) = \sum a_k \overline{\alpha}^k = \sum a_k \overline{\alpha^k} = \overline{\sum a_k \alpha^k} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$, en utilisant que les a_k sont réels et les règles du conjugué. ■

5. Le plan complexe : affixes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On l'appelle alors **plan complexe**.

Définition 5.1 — Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

- Au point $M(x\,;y)$ on associe le nombre complexe $z_M = x + \mathrm{i}y$, appelé **affixe** de M ; M est le **point image** de z_M. On note $M(z_M)$.
- Au vecteur $\vec{w}(x\,;y)$ on associe son affixe $z_{\vec{w}} = x + \mathrm{i}y$; $\vec{w}$ est le **vecteur image** de ce complexe.

L'axe des abscisses est l'**axe des réels**, l'axe des ordonnées l'**axe des imaginaires**.

Propriété 5.2 — Calculs d'affixes

Pour des points A, B et des vecteurs $\vec{w}$, $\vec{w}'$:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A, \qquad z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}, \qquad z_{k\vec{w}} = k\, z_{\vec{w}} \ (k \in \mathbb{R}),$$

et le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

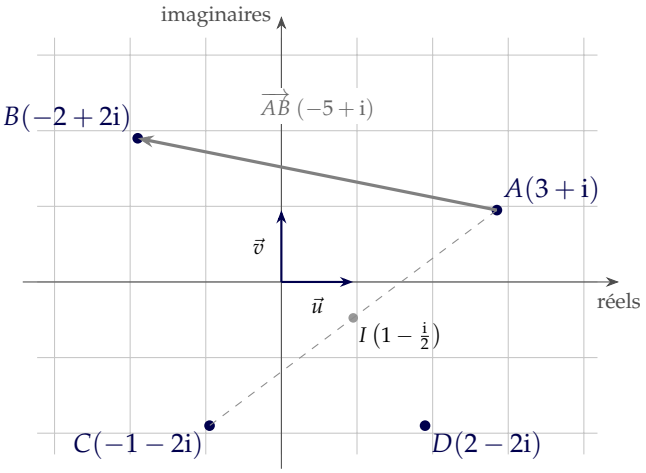


Figure 2 — Affixes de points et de vecteurs : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2+2\mathrm{i}) - (3+\mathrm{i}) = -5+\mathrm{i}$; le milieu I de $[AC]$ a pour affixe $\frac{(3+\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})}{2} = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}$.

6. Module et argument

Définition 6.1 — Module

Le **module** du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Si M est le point d'affixe z, alors $|z| = OM$. Plus généralement, pour deux points A et B : $AB = |z_B - z_A|$.

Définition 6.2 — Argument

Soit $z \neq 0$ d'image M. Un **argument** de z, noté $\arg(z)$, est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
Un complexe non nul a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π : on écrit $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

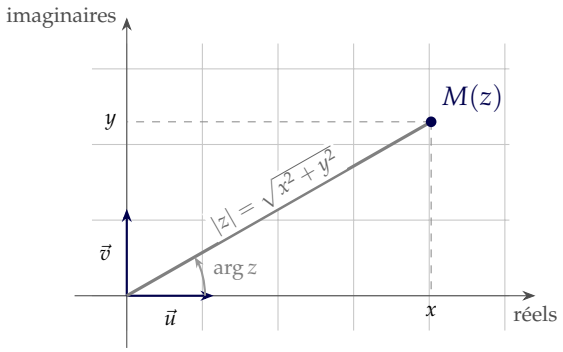


Figure 3 — Le module est la distance OM ; l'argument est l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

Propriété 6.3 — Module et conjugué

Pour tout complexe z : $\quad |z|^2 = z\overline{z}, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad |-z| = |z|, \quad$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.

Démonstration

Avec $z = x + \mathrm{i}y$: $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$; $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$; $|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |z|$. ■

Propriété 6.4 — Arguments remarquables

Soit $z \neq 0$ d'argument θ.

- z est un réel strictement positif $\iff \arg z = 0\ [2\pi]$; z est un réel strictement négatif $\iff \arg z = \pi\ [2\pi]$.
- z est imaginaire pur (non nul) $\iff \arg z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
- $\arg(\overline{z}) = -\theta\ [2\pi]$ et $\arg(-z) = \theta + \pi\ [2\pi]$ (symétries de la figure 1).

Théorème 6.5 — Forme trigonométrique

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ non nul, $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et

$$z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right).$$

Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg z\ [2\pi]$.

Méthode 6.6 — Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

1. Calculer $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Chercher θ tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ — les deux conditions sont nécessaires, le cosinus seul ne suffit pas.

3. Reconnaître un angle remarquable, ou situer θ à l'aide du quadrant du point M.

Exemple. $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$: $r = \sqrt{1+3} = 2$; $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donnent $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Donc $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

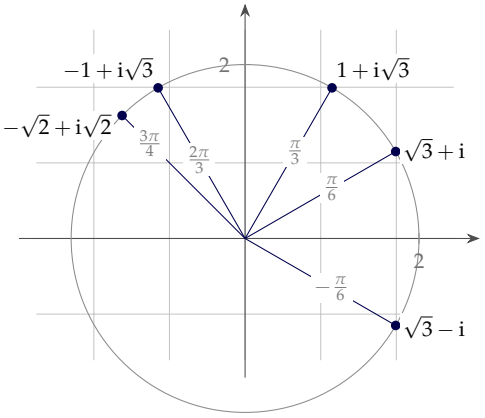


Figure 4 — Cinq nombres de module 2 et leurs arguments. Deux nombres de même module sont sur le même cercle ; deux nombres de même argument sont sur la même demi-droite issue de O.

Théorème 6.7 — Module et argument d'un produit, d'un quotient

Pour z, z' non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$:

	Module	Argument $[2\pi]$
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) = n\arg z$
Inverse	$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\dfrac{1}{z} = -\arg z$
Quotient	$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$

Le module du produit est le produit des modules ; l'argument du produit est la *somme* des arguments.

Démonstration — Le produit

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$. Alors

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right],$$

soit $zz' = rr'\left[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\right]$ d'après les formules d'addition. Comme $rr' > 0$, c'est une forme trigonométrique : $\lvert zz'\rvert = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \theta'$. La puissance s'en déduit par récurrence ; l'inverse et le quotient en écrivant $z \times \frac{1}{z} = 1$ et $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. ■

Remarque — Formules de trigonométrie utiles

Addition : $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$, $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$.
Duplication : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

7. Forme exponentielle

Définition 7.1 — Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on pose $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
C'est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : son image parcourt le cercle trigonométrique.
Tout complexe $z \neq 0$ de module r et d'argument θ s'écrit sous **forme exponentielle** $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Remarque — D'où vient cette notation ?

La fonction $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie $f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta')$ (c'est le calcul de la démonstration 6.7 avec $r = r' = 1$) : la même équation fonctionnelle que l'exponentielle, $\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x'} = \mathrm{e}^{x+x'}$. La notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ rend les règles de calcul évidentes.

Propriété 7.2 — Règles de calcul

Pour tous réels θ, θ' et tout entier naturel n :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}},$$

et, pour tout entier naturel n, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (**formule de Moivre**). Valeurs à connaître : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

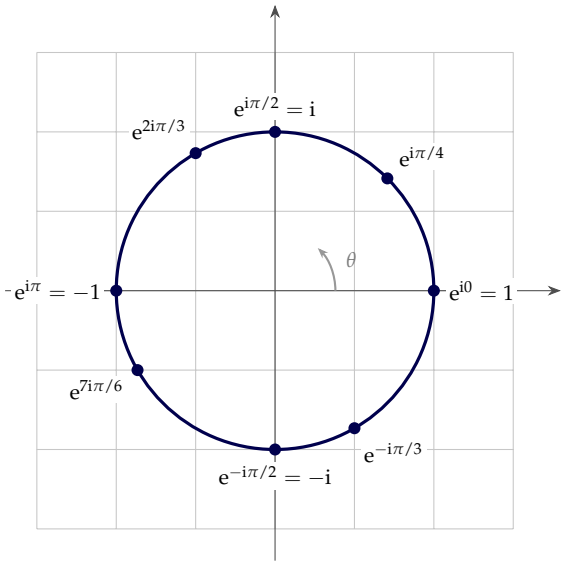


Figure 5 — Le cercle trigonométrique porte tous les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: multiplier par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, c'est tourner d'un angle θ autour de O.

Méthode 7.3 — Passer d'une forme à l'autre

Algébrique → exponentielle : calculer r, puis θ par son cosinus *et* son sinus (méthode 6.6).
$1+\mathrm{i}$: $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. $\quad$ $\sqrt{3}+\mathrm{i}$: $r = 2$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$.

Exponentielle → algébrique : développer $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. $\quad 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

Exercice d'application 9

Soit $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ ***et*** $z' = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$***. Calculer*** zz', $\dfrac{z}{z'}$ ***et*** z^3***, et donner leur forme algébrique.***

Solution. $zz' = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+\pi/3)} = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 6\mathrm{i}$. $\quad \dfrac{z}{z'} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6-\pi/3)} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$.
$z^3 = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 8\mathrm{i}$. *Contrôle par le binôme :* $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = 3\sqrt{3} + 3\times 3\,\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 3\sqrt{3} + 9\mathrm{i} - 3\sqrt{3} - \mathrm{i} = 8\mathrm{i}$ ✓.

Théorème 7.4 — Formules d'Euler

Pour tout réel θ : $\quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ $\quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Démonstration

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = 2\cos\theta$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{i}\sin\theta$. ■

Exercice d'application 10

Linéariser $\cos^2\theta$ ***à l'aide des formules d'Euler.***

Solution. $\cos^2\theta = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{4} = \dfrac{2\cos 2\theta + 2}{4} = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.
On retrouve la formule de duplication, et la méthode s'étend à toutes les puissances de cos et sin.

8. Applications à la géométrie

Théorème 8.1 — Distances et angles

Soit A, B, C, D quatre points deux à deux distincts d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D.

$$AB = |z_B - z_A|, \qquad \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi], \qquad \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = \arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\ [2\pi].$$

Démonstration

Soit E le point tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$: son affixe est $z_B - z_A$. Alors $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right) = \arg(z_B - z_A)$ et $AB = OE = |z_B - z_A|$.

Par la relation de Chasles sur les angles, $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$. ■

Méthode 8.2 — Nature d'un triangle par le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Ce quotient a pour module $\dfrac{AC}{AB}$ et pour argument $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. Ainsi :

- il est *réel* $\iff$ A, B, C sont alignés ; il est *imaginaire pur* $\iff$ le triangle est rectangle en A ;
- il est de module 1 $\iff$ le triangle est isocèle en A ; il vaut $\pm\mathrm{i}$ $\iff$ le triangle est rectangle isocèle en A ;
- il vaut $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$ $\iff$ le triangle est équilatéral.

Exercice d'application 11

Soit $A(2+\mathrm{i})$, $B(-1+2\mathrm{i})$ ***et*** $C(1-2\mathrm{i})$. ***Déterminer la nature du triangle*** ABC.

Solution. $z_B - z_A = -3+\mathrm{i}$ et $z_C - z_A = -1-3\mathrm{i}$, donc

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1-3\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}} = \frac{(-1-3\mathrm{i})(-3-\mathrm{i})}{9+1} = \frac{3+\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{10} = \frac{10\mathrm{i}}{10} = \mathrm{i}.$$

Le quotient vaut i : $\dfrac{AC}{AB} = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est **rectangle isocèle en** A.
Contrôle direct : $AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $BC = |2-4\mathrm{i}| = \sqrt{20}$, et $AB^2 + AC^2 = 20 = BC^2$ ✓.

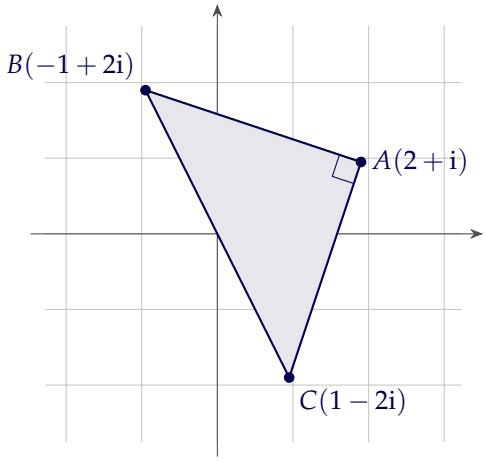


Figure 6 — Le triangle de l'application 11 : rectangle isocèle en A, ce que le quotient i *résume en un seul nombre.*

Méthode 8.3 — Ensembles de points

Traduire la condition par une distance ou un angle, puis reconnaître la figure.

- $|z - z_A| = r$ $(r > 0)$: **cercle** de centre A et de rayon r ; $|z - z_A| \leqslant r$: disque fermé.
- $|z - z_A| = |z - z_B|$: **médiatrice** de $[AB]$ (points équidistants de A et B).

- $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ réel (avec $z \neq z_B$) : **droite** (AB) privée de B ; imaginaire pur : **cercle de diamètre** $[AB]$ privé de A et B.

9. Racines n-ièmes de l'unité

Définition 9.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **racine n-ième de l'unité** est un nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

Théorème 9.2 — Description de $\mathbb{U}_n$

$\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments :

$$\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}, \qquad k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n-1\}.$$

Leurs images sont les sommets d'un **polygone régulier** à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, dont l'un est le point d'affixe 1.

Démonstration — Au programme

Les solutions. Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$: on cherche $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0\,;2\pi[$. Alors $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \iff n\theta = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff \theta = \dfrac{2k\pi}{n}$. Les valeurs de θ dans $[0\,;2\pi[$ correspondent exactement à $k \in \{0,\ldots,n-1\}$.

Elles sont distinctes. Si $\omega_k = \omega_{k'}$ avec $0 \leqslant k, k' \leqslant n-1$, alors $\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$ pour un entier l, soit $k - k' = ln$: n divise $k - k'$, qui est compris entre $-(n-1)$ et $n-1$. Donc $k - k' = 0$.
Il y a donc exactement n racines, et le théorème 4.5 confirme qu'il ne peut y en avoir davantage. ■

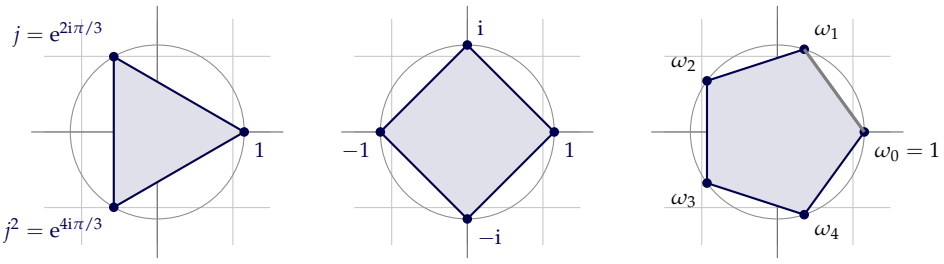


Figure 7 — Les racines n-ièmes de l'unité pour $n = 3$, 4 et 5. Chaque sommet se déduit du précédent par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Propriété 9.3 — Le nombre j

On note $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $\mathbb{U}_3 = \{1\,;j\,;j^2\}$, $j^3 = 1$, $j^2 = \bar{j} = \dfrac{1}{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration

$j^3 = e^{2i\pi} = 1$. Comme $j \neq 1$, la factorisation $j^3 - 1 = (j-1)(1+j+j^2) = 0$ impose $1+j+j^2 = 0$. Enfin $j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = \bar{j}$, et $j\bar{j} = |j|^2 = 1$ donne $\bar{j} = \dfrac{1}{j}$. ■

Exercice d'application 12 — Périmètre du pentagone régulier

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ***vaut*** $10\sin\dfrac{\pi}{5}$.

Solution. Les sommets sont les images des racines cinquièmes de l'unité ; les cinq côtés ont la même longueur, celle de $[\omega_0\omega_1]$ par exemple :

$$|\omega_1 - \omega_0| = \left|e^{2i\pi/5} - 1\right| = \left|e^{i\pi/5}\left(e^{i\pi/5} - e^{-i\pi/5}\right)\right| = \left|e^{i\pi/5}\right| \times \left|2i\sin\frac{\pi}{5}\right| = 2\sin\frac{\pi}{5},$$

en utilisant la formule d'Euler pour le sinus et $\left|e^{i\pi/5}\right| = 1$. Le périmètre vaut donc $5 \times 2\sin\dfrac{\pi}{5} = 10\sin\dfrac{\pi}{5} \approx 5{,}88$.

La même méthode donne, pour le polygone régulier à n côtés, un périmètre $2n\sin\dfrac{\pi}{n}$, qui se rapproche de 2π quand n grandit : c'est la longueur du cercle.

Méthodes

Méthode M1 — Quelle forme choisir ?

- **Forme algébrique** $a + ib$: pour additionner, soustraire, identifier parties réelle et imaginaire, résoudre une équation en x et y.
- **Forme exponentielle** $re^{i\theta}$: pour multiplier, diviser, élever à une puissance, lire un module et un angle.
- On passe de l'une à l'autre autant de fois que nécessaire dans un même calcul.

Méthode M2 — Déterminer un argument sans se tromper

Toujours calculer *cosinus et sinus*. Si $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, l'argument est $\dfrac{3\pi}{4}$ ou $-\dfrac{3\pi}{4}$: c'est le signe du sinus qui tranche. Placer le point sur une figure évite toute erreur de quadrant.

Méthode M3 — Utiliser $\bar{z}$ pour prouver qu'un nombre est réel ou imaginaire pur

$Z \in \mathbb{R} \iff \overline{Z} = Z$ et $Z \in i\mathbb{R} \iff \overline{Z} = -Z$. On calcule $\overline{Z}$ avec les règles du conjugué, sans repasser par la forme algébrique.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Attention

- $\mathrm{Im}(3+5\mathrm{i}) = 5$, et non 5i.
- $|z|^2 = z\bar{z}$, mais $z^2 \neq |z|^2$ en général : $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ alors que $|1+\mathrm{i}|^2 = 2$.
- Pas d'inégalité entre complexes : « $z > 0$ » n'a de sens que si z est réel.
- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$, mais $\arg(z+z')$ n'a pas de formule simple.
- $|z+z'| \neq |z| + |z'|$ en général : $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} < 2$.
- $\sqrt{-4}$ ne s'écrit pas : on écrit $z^2 = -4 \iff z = \pm 2\mathrm{i}$.
- Une racine évidente se *vérifie* par un calcul de $P(\alpha)$, puis la factorisation se *contrôle* en développant.
- Les racines conjuguées n'existent que pour des coefficients réels.

Module Python — le type `complex`

Python connaît nativement les nombres complexes : le nombre i se note `1j`, et le module `cmath` fournit module, argument et passage entre les formes.

```
import cmath, math
z = complex(3, 4)           # 3 + 4i
print(z.real, z.imag)       # 3.0 4.0
print(abs(z))               # 5.0 :  le module
print(z.conjugate())        # (3-4j) :  le conjugue
print(cmath.phase(z))       # 0.9273 :  un argument en radians, dans ]-pi ; pi]
w = cmath.rect(2, math.pi/3)  # forme exponentielle -> algebrique :  2 e^(i pi/3)
print(w)                    # (1.0000000000000002+1.7320508075688772j)
def racines_unite(n):
  # les n racines n-iemes de l'unite
  return [cmath.exp(2j * math.pi * k / n) for k in range(n)]
print(sum(racines_unite(5)))  # environ 0 :  la somme des racines est nulle
print(5 * abs(racines_unite(5)[1] - 1))  # 5.8779 :  le perimetre du pentagone
```

Remarque — Lire les résultats

`w` vaut $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$: le `1.0000000000000002` est l'arrondi du calcul en flottants, pas une erreur mathématique. De même la somme des racines cinquièmes s'affiche comme un nombre de l'ordre de 10^{-16} : elle est nulle en valeur exacte, car $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \dfrac{\omega^5-1}{\omega-1} = 0$ pour $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$.

Remarque — Les trois réflexes du chapitre

1. Choisir la forme adaptée à l'opération : algébrique pour additionner, exponentielle pour multiplier. 2. Un argument se détermine par son cosinus *et* son sinus, figure à l'appui. 3. En géométrie, un quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ contient à la fois un rapport de longueurs et un angle.