Chapitre 1. Les nombres complexes

Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure **Calculatrice autorisée**

Nom : ..... Prénom : .....

Classe : **Terminale Maths expertes** Date : .....

Note
... / 20

Exercice 1 : Calculs dans $\mathbb{C}$ (5 points)

1. Écrire sous forme algébrique :

$$z_1 = (3-2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})\,; \qquad z_2 = (2-\mathrm{i})^2 - (1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})\,; \qquad z_3 = \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}.$$

2. On pose $u = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2+\mathrm{i}}$. Écrire u sous forme algébrique, puis donner son conjugué $\overline{u}$ et son module $|u|$.

Exercice 2 : Équations dans $\mathbb{C}$ (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(2-\mathrm{i})z = 3+\mathrm{i}$.

2. $2z + 3\overline{z} = 5 - 2\mathrm{i}$ (on posera $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels).

3. $z^2 - 6z + 13 = 0$.

4. Déterminer le réel m pour que $1+\mathrm{i}$ soit solution de l'équation $z^2 - 2z + m = 0$, puis donner l'autre solution.

Exercice 3 : Formule du binôme et équations polynomiales (5 points)

Partie A. À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(2-\mathrm{i})^3$.

Partie B. On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que 3i est une racine de P.

2. Justifier, sans calcul, que $-3\mathrm{i}$ est aussi une racine de P.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = \left(z^2+9\right)\left(az^2+bz+c\right)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 : Formes trigonométrique et exponentielle (QCM) (5 points)

Pour chaque question, indiquer la seule réponse exacte parmi les quatre réponses proposées. Aucune justification n'est demandée. Dans la question 3, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$; dans la question 5, θ désigne un réel quelconque.

N°	Question	a.	b.	c.	d.
1	Un argument de $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ est :	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
2	La forme algébrique de $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ est :	$2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$	$-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$	$2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$
3	Le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ est égal à :	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/12}$	$2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12}$
4	Le nombre $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^6$ est égal à :	64	64i	-64	$-64\mathrm{i}$
5	$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2$ est égal à :	$2\cos(2\theta)$	$2\cos^2\theta$	$2\mathrm{i}\sin(2\theta)$	2