Chapitre 1. Fiche d'exercices n°1

Les nombres complexes

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Écrire sous forme algébrique.

a. $3-(2-\mathrm{i})$
b. $5(2+3\mathrm{i})$
c. $3\mathrm{i}\left(1-\frac{4}{3}\mathrm{i}\right)$
d. $(2-3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})$
e. $(1+\mathrm{i})^2$
f. $(2+5\mathrm{i})^2$
g. $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$
h. $(3-2\mathrm{i})^2$

Exercice 2 ⋆

Simplifier.

a. i^3
b. i^4
c. i^{27}
d. i^{2026}
e. $(3\mathrm{i})^3$
f. $(1-\mathrm{i})^2$
g. $(1-\mathrm{i})^4$
h. $\frac{1}{\mathrm{i}}$

Exercice 3 ⋆

Pour chaque nombre, donner sa partie réelle, sa partie imaginaire et son conjugué.

a. $3+2\mathrm{i}$
b. $5-4\mathrm{i}$
c. 7
d. i
e. $-5\mathrm{i}$
f. $2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$
g. $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$
h. i^3

Exercice 4 ⋆

Écrire sous forme algébrique.

a. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$
b. $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
c. $\dfrac{3+3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$
d. $\dfrac{5+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$
e. $\dfrac{7\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}}$
f. $\dfrac{1}{3-2\mathrm{i}}$

Exercice 5 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

a. $(2z-3\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})=0$
b. $\overline{z}=2z+3-3\mathrm{i}$
c. $(1+\mathrm{i})z=3-\mathrm{i}$
d. Déterminer les réels x et y tels que $2x-y+\mathrm{i}(x+y)=1-3\mathrm{i}$.

Exercice 6 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

a. $z^2+z+1=0$
b. $2z^2+2z+5=0$
c. $-z^2+2\sqrt{5}\,z-4=0$
d. $3z^2+5=0$
e. $z^2-4z+13=0$
f. $z^2=-9$

Exercice 7 ⋆

Déterminer le module et un argument de chaque nombre, puis l'écrire sous forme exponentielle.

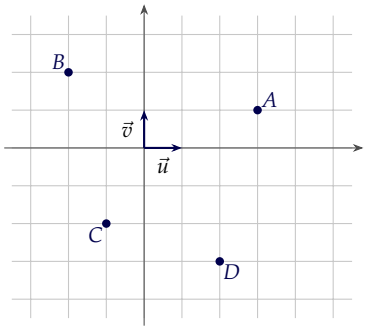
a. $3+3\mathrm{i}$ c. $-2\mathrm{i}$ e. $1-\mathrm{i}$
b. $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ d. -5 f. $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

Série B ⋆⋆ — Application

Exercice 8 ⋆⋆

Dans le plan complexe ci-contre, on a placé les points A, B, C et D.

a. Lire les affixes z_A, z_B, z_C et z_D.
b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
c. Calculer l'affixe du milieu I de $[AC]$.
d. Donner l'affixe du symétrique A' de A par rapport à O, puis celle du symétrique B' de B par rapport à l'axe des réels.
e. Déterminer l'affixe du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme, et placer E.



Exercice 9 ⋆⋆

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a. Vérifier que 2 est une racine de P.
b. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.
c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
d. Placer les images A, B, C des trois solutions (avec A l'image de la solution réelle) et déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 10 ⋆⋆

a. Écrire sous forme exponentielle : $2+2\mathrm{i}$; $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$; $-2+2\mathrm{i}$; -4 ; $3\mathrm{i}$; $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
b. Écrire sous forme algébrique : $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$; $2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$; $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$; $\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$; $6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

a. Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^6 et z_2^4.
b. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis calculer $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 12 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$, en posant $z = x + \mathrm{i}y$.

a. $z + 2\overline{z} = 6 - 3\mathrm{i}$ b. $2z - \overline{z} = 1 + 6\mathrm{i}$ c. $z\overline{z} + 2z = 3 + 2\mathrm{i}$

Série C ⋆⋆ — Géométrie : configurations et lieux

Exercice 13 ⋆⋆

Soit A, B, C les points d'affixes $z_A = 3 + \mathrm{i}$, $z_B = -1 + 3\mathrm{i}$ et $z_C = 1 - 3\mathrm{i}$.

a. Placer les points dans un repère orthonormé.
b. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
c. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
d. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un carré, et le placer.
e. Montrer que le centre de ce carré est l'origine O.

Exercice 14 ⋆⋆

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|z - 2| = 3$
b. $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z + 3|$
c. $|z - \mathrm{i}| \leqslant 1$
d. $\dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z - 1}$ est réel $(z \neq 1)$

Exercice 15 ⋆⋆

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes $z_A = 2 - 3\mathrm{i}$, $z_B = 5 - \mathrm{i}$, $z_C = 1$ et $z_D = 7 + 4\mathrm{i}$.

a. Calculer $\dfrac{z_O - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle OAB. Retrouver ce résultat en calculant les longueurs OA, OB et AB.
b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
c. Déterminer l'affixe du point E tel que $OABE$ soit un carré.

Exercice 16 ⋆⋆

Soit M, A et H les points d'affixes $z_M = -1 + \mathrm{i}$, $z_A = 1 + 2\mathrm{i}$ et $z_H = -2 + 3\mathrm{i}$.

a. Placer les points et conjecturer la nature du triangle MAH.
b. Démontrer cette conjecture à l'aide du quotient $\dfrac{z_H - z_M}{z_A - z_M}$.
c. Déterminer l'affixe du point T tel que $MATH$ soit un carré.
d. Déterminer l'affixe du centre Ω de ce carré et le rayon de son cercle circonscrit.

Exercice 17 ⋆⋆

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant chaque condition.

a. $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$
b. $|\mathrm{i}z - 3| = 2$
c. $|\overline{z} - 1 - \mathrm{i}| = 3$
d. $\arg(z - 1) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
e. $z - \overline{z} = 4\mathrm{i}$

Indication pour b et c : on pourra factoriser par i, *ou utiliser* $|\overline{w}| = |w|$.

Exercice 18 ⋆⋆

Soit A et B les points d'affixes $z_A = 2 - 2\mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$. À tout point M d'affixe $z \neq z_B$ on associe le nombre complexe

$$z' = \frac{z - 2 + 2\mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de z'.
b. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que z' soit réel, puis l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que z' soit imaginaire pur.
c. Retrouver ces deux résultats par le calcul, en posant $z = x + \mathrm{i}y$ et en écrivant z' sous forme algébrique.
d. Représenter $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sur une même figure.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

On considère les points $J(\mathrm{i})$, $A(-2 - 2\mathrm{i})$, $B(3 + 3\mathrm{i})$, $C(2 - 2\mathrm{i})$ et $H(3 - 3\mathrm{i})$.

a. Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fil de l'exercice.
b. Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC et préciser son rayon.
c. Donner l'écriture algébrique de $\dfrac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$. En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
d. Montrer de même que (BH) et (AC) sont perpendiculaires. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
e. Vérifier que $z_H = z_A + z_B + z_C - 2z_J$. Traduire cette égalité par une relation vectorielle entre $\overrightarrow{JH}$, $\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{JC}$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

À tout nombre complexe $z \neq 0$ on associe $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

a. Soit $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Écrire a sous forme exponentielle, puis calculer $f(a)$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 1$ et écrire les solutions sous forme exponentielle.
c. Soit M un point du cercle trigonométrique. Justifier que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel, puis montrer que $f(z)$ est réel.
d. On pose $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.
e. En déduire l'ensemble des points M tels que $f(z)$ soit réel, puis l'ensemble des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Les représenter.

Exercice 21 ⋆⋆⋆

Soit A et B les points d'affixes $z_A = -2\mathrm{i}$ et $z_B = 4 + 2\mathrm{i}$. À tout point M d'affixe $z \neq z_A$ on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z - 4 - 2\mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

a. Déterminer les affixes des images des points $C(2)$ et $D(4 - 2\mathrm{i})$.
b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $|z'| = 1$; donner une équation de $\mathcal{E}$ et le construire.
c. Montrer que pour tout $z \neq -2\mathrm{i}$: $(z' - 1)(z + 2\mathrm{i}) = -4 - 4\mathrm{i}$.
d. En déduire que si M décrit le cercle de centre A et de rayon $r > 0$, alors M' décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Quelle est l'image du cercle de centre A et de rayon 4 ?

Série D ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 22 ⋆⋆⋆

a. En factorisant $z^3 - 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On note j la solution de partie imaginaire strictement positive.
b. Placer les images des trois solutions et préciser la nature du triangle qu'elles forment.
c. Écrire j sous forme exponentielle. À l'aide des propriétés de j (propriété 9.3 du cours), calculer j^{2026} et $(1+j)^{2026}$.
d. En déduire de **a** les solutions de $z^3 = 8$.
e. Résoudre $z^4 = 1$ et placer les images des solutions.
f. *Défi.* Démontrer que le périmètre d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 vaut $16\sin\dfrac{\pi}{8}$, puis qu'il est égal à $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Exercice 23 ⋆⋆⋆

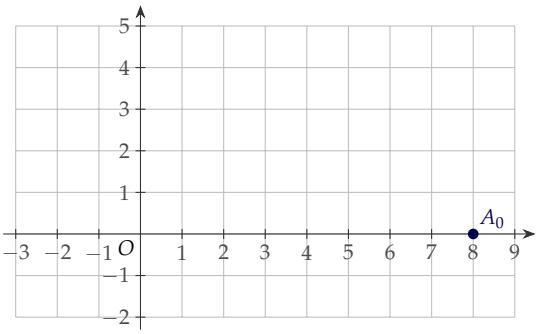
Soit θ un réel.
a. Développer $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$ à l'aide de la formule du binôme.
b. En utilisant la formule de Moivre, en déduire $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
c. En déduire que $c = \cos\dfrac{\pi}{9}$ est solution de l'équation $8c^3 - 6c - 1 = 0$.

Exercice 24 ⋆⋆⋆

Soit $P(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400$.
a. Justifier que si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ l'est aussi.
b. Soit b un réel. Écrire $P(\mathrm{i}b)$ sous forme algébrique, et en déduire que P admet exactement deux racines imaginaires pures.
c. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(z) = \left(z^2 + 16\right)\left(az^2 + bz + c\right)$.
d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
e. Placer les images A, B, C, D des solutions (A et B imaginaires pures, $\mathrm{Im}(z_A) > 0$, $\mathrm{Im}(z_C) > 0$) et déterminer la nature du quadrilatère $ACDB$.

Exercice 25 ⋆⋆⋆

D'après un sujet de bac. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point d'affixe z_n et $r_n = |z_n|$. Le point A_0 est placé sur la figure ci-contre, que l'on complétera au fil de l'exercice.



a. Écrire $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme exponentielle. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique, puis placer A_1, A_2, A_3, A_4 et tracer la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3A_4$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$. Pour quelles valeurs de n le point A_n est-il sur l'axe des réels ?

c. Montrer que (r_n) est géométrique et préciser sa limite. Interpréter géométriquement.

d. Montrer que $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$, puis que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}. Le vérifier sur la figure pour $n = 0$ et $n = 1$.

e. On note $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée reliant A_0 à A_n. Exprimer L_n en fonction de n et déterminer sa limite.

Série E ⋆⋆ — Avec Python

Exercice 26 ⋆⋆

En Python, le nombre i s'écrit `1j` et le module `cmath` traite les complexes.

a. Prévoir l'affichage de chaque ligne, puis vérifier à la machine.

```
z = 3 + 4j
print(z.real, z.imag)
print(abs(z))
print(z.conjugate())
print(z * z.conjugate())
print((1 + 1j) ** 4)
```

b. Sans utiliser `abs` ni `cmath`, écrire une fonction `module(z)` qui renvoie $|z|$, puis une fonction `argument(z)` qui renvoie un argument de z dans $]-\pi\,;\pi]$. *Indication :* `math.atan2(y, x)` *renvoie l'angle du point de coordonnées* $(x\,;y)$.

c. Écrire une fonction `forme_expo(z)` qui affiche le module et l'argument de z, puis l'appliquer à $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et à $-2+2\mathrm{i}$. Comparer avec les valeurs exactes.

Exercice 27 ⋆⋆

a. Écrire une fonction `racines(a, b, c)` qui renvoie les solutions dans $\mathbb{C}$ de $az^2+bz+c=0$, pour a, b, c réels et $a \neq 0$, en distinguant les cas selon le signe du discriminant.

b. Que renvoie-t-elle pour $(a,b,c) = (1,1,1)$, $(1,-4,13)$, $(2,2,5)$ et $(1,-2,1)$? Comparer avec l'exercice 6.

c. Compléter la fonction pour qu'elle vérifie, dans chaque cas, que la somme des solutions vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

Exercice 28 ⋆⋆

Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche les nombres complexes w tels que $w^n = z$.

a. Soit $w = \rho\, e^{i\varphi}$ ($\rho > 0$). Montrer que $w^n = z$ si et seulement si $\rho^n = r$ et $n\varphi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que l'équation $w^n = z$ a exactement n solutions :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n-1\},$$

et que $w_k = w_0\, \omega_k$, où ω_k désigne la racine n-ième de l'unité du théorème 9.2.

b. Écrire une fonction `racines_n(z, n)` qui renvoie la liste des n solutions, à l'aide de `cmath.polar(z)`, qui renvoie le couple $(r\,;\theta)$, et de `cmath.rect(rho, phi)`, qui renvoie $\rho\, e^{i\varphi}$.

c. Pour $z = 8i$ et $n = 3$, afficher les solutions et vérifier à la machine que chacune vérifie `abs(w**3 - z) < 1e-9`.

d. Retrouver ces trois solutions à la main, sous forme algébrique, et les placer dans le plan complexe.