**Terminale Maths expertes**

# Division dans $\mathbb{Z}$ et congruences

**Devoir surveillé** **Durée : 1 heure** **Calculatrice autorisée**

**Barème indicatif :** Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte.

## Exercice 1 : Divisibilité et division euclidienne (5 points)

1. Effectuer la division euclidienne de 2026 par 37, puis celle de $-87$ par 11.
2. Déterminer tous les entiers relatifs $n$ tels que $n+3$ divise $2n+11$.
3. Soit $n$ un entier relatif. Montrer que tout diviseur commun $d$ de $7n+4$ et de $5n+3$ divise 1. Que peut-on en conclure ?
4. Dans la division euclidienne de l'entier naturel $a$ par l'entier naturel non nul $b$, le quotient est 13 et le reste est 7. On sait de plus que $a+b=245$. Déterminer $a$ et $b$.

## Exercice 2 : Congruences (5 points)

1. **a.** Vérifier que $3^3 \equiv -1\ [7]$.
   **b.** En déduire le reste de la division euclidienne de $3^{2026}$ par 7.
2. Déterminer le chiffre des unités de $13^{2026}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, le nombre $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.
4. **a.** À l'aide d'un tableau de congruences, déterminer les restes possibles de $x^2$ dans la division par 5, pour $x \in \mathbb{Z}$.
   **b.** En déduire que l'équation $x^2-5y^2=3$ n'a aucune solution $(x\,;y)$ formée d'entiers relatifs.

## Exercice 3 : Les codes-barres (5 points)

Les produits vendus en magasin portent un code-barres EAN-13 formé de 13 chiffres $a_1a_2\ldots a_{13}$. Le dernier, $a_{13}$, est une **clé de contrôle** : on ajoute les chiffres de rang impair $(a_1, a_3, \ldots, a_{13})$ et le triple des chiffres de rang pair $(a_2, a_4, \ldots, a_{12})$ :

$$S = (a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13}) + 3\,(a_2+a_4+\cdots+a_{12}),$$

et le code est **valide** si et seulement si $S \equiv 0\ [10]$. Les codes de cet exercice sont fictifs.

1. Vérifier que le code 3 760123 456784 est valide.
2. Sur une étiquette abîmée, on lit 3 141592 65358$c$, où la clé $c$ est effacée. Déterminer $c$.
3. Une caisse lit mal **un seul** chiffre d'un code valide : un chiffre $a$ est remplacé par un chiffre $b \neq a$. Montrer que l'erreur est toujours détectée, que le chiffre soit de rang impair ou de rang pair.
4. Une autre erreur fréquente consiste à échanger deux chiffres voisins $a$ et $b$, avec $a \neq b$. Montrer que cette erreur n'est pas détectée si et seulement si $a-b=5$ ou $a-b=-5$. Donner un exemple.

## Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

**1.** Le reste de la division euclidienne de $-25$ par 7 est :
**a.** $-4$ **b.** 4 **c.** 3 **d.** $-3$

**2.** Si $a \equiv 3\ [8]$, alors $a^2 + a$ est congru modulo 8 à :
**a.** 4 **b.** 12 **c.** 0 **d.** 6

**3.** Le nombre $10^{2026}$ est congru modulo 11 à :
**a.** 0 **b.** 10 **c.** $-1$ **d.** 1

**4.** Les entiers $x$ tels que $2x \equiv 4\ [6]$ sont exactement les entiers tels que :
**a.** $x \equiv 2\ [6]$ **b.** $x \equiv 2\ [3]$ **c.** $x \equiv 1\ [3]$ **d.** il n'y en a aucun

**5.** Parmi les nombres suivants, lequel est divisible par 11 ?
**a.** 12 345 **b.** 20 261 **c.** 91 817 **d.** 7 770