Terminale Maths expertes

Divisibilité, division euclidienne et congruences

Fiche d'exercices

Dans toute la fiche, les lettres désignent des entiers relatifs, sauf mention contraire. On note $a \equiv b\ [n]$ pour « a est congru à b modulo n ».

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : diviseurs et multiples ⋆

a. Donner la liste des diviseurs positifs de 36, de 60 et de 97.

b. Donner tous les diviseurs de -18 dans $\mathbb{Z}$.

c. Vrai ou faux ? Justifier.

(1) -24 est un multiple de 6. (2) 7 divise -49. (3) 0 divise 5.

(4) 5 divise 0. (5) 12 divise 4. (6) Si $a \mid b$, alors $a \leqslant b$.

Exercice 2 : division euclidienne ⋆

a. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

247 par 12 ; -247 par 12 ; 1 000 par 37 ; -1 par 5 ; 3 par 7.

b. Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle traduit une division euclidienne, et si oui laquelle (préciser le dividende, le diviseur, le quotient et le reste) :

$230 = 17 \times 13 + 9$; $100 = 7 \times 13 + 9$; $-63 = 8 \times (-8) + 1$; $58 = 5 \times 10 + 8$.

Exercice 3 : congruences ⋆

a. Vrai ou faux ? Justifier.

(1) $23 \equiv 3\ [5]$ (2) $-7 \equiv 5\ [12]$ (3) $26 \equiv 4\ [6]$ (4) $2^{10} \equiv 1\ [11]$

(5) $45 \equiv -3\ [8]$ (6) $3^3 \equiv 1\ [4]$ (7) $1\,001 \equiv -1\ [7]$ (8) $-13 \equiv 2\ [5]$

b. Compléter avec le plus petit entier naturel possible :

$47 \equiv \ldots\ [6]$; $-47 \equiv \ldots\ [6]$; $2\,026 \equiv \ldots\ [9]$; $10^5 \equiv \ldots\ [11]$.

Exercice 4 : restes sans calculatrice ⋆

À l'aide des congruences et sans calculer les nombres, déterminer le reste de la division euclidienne de :

a. 2^{10} par 7 (utiliser 2^3) ; **b.** 3^5 par 11 ; **c.** $1\,001 \times 999$ par 10 ;

d. $(-13)^3$ par 6 ; **e.** 99^{99} par 10.

Exercice 5 : carrés modulo 5 ⋆⋆

a. Compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$x \equiv \ldots\ [5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots\ [5]$					

b. En déduire que le carré d'un entier n'est jamais congru à 2 ni à 3 modulo 5.

c. L'équation $x^2 = 5y + 3$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

d. Un entier dont l'écriture décimale se termine par 2, 3, 7 ou 8 peut-il être un carré ?

Exercice 6 : combinaisons linéaires ⋆⋆

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si un entier d divise $5n+3$ et $3n+2$, alors $d = 1$ ou $d = -1$.

b. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si un entier d divise $n+3$, alors d divise $n(n+3)$, puis que d divise n^2+3n+5 si et seulement si d divise 5.

c. En déduire les entiers naturels n tels que $n+3$ divise n^2+3n+5.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 7 : quotients entiers ⋆⋆

a. Vérifier que, pour tout entier n, $2n+13 = 2(n+3)+7$.

b. En déduire les entiers relatifs n tels que $n+3$ divise $2n+13$.

c. Vérifier que $n^2+2 = (n-1)(n+1)+3$, puis déterminer les entiers relatifs n tels que $n-1$ divise n^2+2.

Exercice 8 : équations dans $\mathbb{N}^2$ ⋆⋆

a. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x^2-y^2 = 21$.
Indication : factoriser et utiliser les diviseurs de 21.

b. Vérifier que $xy-2x-y = (x-1)(y-2)-2$, puis déterminer les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $xy-2x-y = 5$.

Exercice 9 : division euclidienne avec un paramètre ⋆⋆

Soit n un entier naturel.

a. Vérifier que $n^2+3n+5 = (n+1)(n+2)+3$.

b. En déduire, pour $n \geqslant 3$, le quotient et le reste de la division euclidienne de n^2+3n+5 par $n+1$.

c. Traiter à part les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

d. Pour quelles valeurs de n l'entier $n+1$ divise-t-il n^2+3n+5 ?

Exercice 10 : retrouver une division ⋆⋆

Dans la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b, le quotient est 12 et le reste est 17. Si l'on ajoute 104 au dividende a, sans changer le diviseur, le quotient augmente de 4 et le reste ne change pas.

a. Traduire les deux divisions euclidiennes par deux égalités.

b. En déduire b, puis a. Vérifier que les conditions sur les restes sont satisfaites.

Exercice 11 : restes des puissances de 2 modulo 7 ⋆⋆

a. Vérifier que $2^3 \equiv 1\ [7]$.

b. En déduire, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 7 (on écrira $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$).

c. Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2026} par 7 ?

d. Déterminer les entiers naturels n tels que 2^n+3 soit divisible par 7.

Exercice 12 : chiffre des unités ⋆⋆

Le chiffre des unités d'un entier naturel est son reste dans la division par 10. Déterminer le chiffre des unités de :

a. 3^{2027} ; **b.** 9^{2027} ; **c.** 2026^{2026} ; **d.** 13^{2026}.

Exercice 13 : critères de divisibilité ⋆⋆⋆

On note $\overline{abc\ldots}$ l'entier dont les chiffres sont a, b, c…

a. L'entier 918 082 est-il divisible par 11 ?

b. Déterminer le chiffre x tel que $\overline{3x52}$ soit divisible par 11.

c. Déterminer le chiffre x tel que $\overline{5x34}$ soit divisible par 9.

d. Déterminer tous les entiers $\overline{7x2y}$ divisibles à la fois par 4 et par 9.

Série C ⋆⋆⋆ Applications

Exercice 14 : équations avec des congruences ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes (on pourra utiliser des tableaux de congruences) :

a. $3x \equiv 2\ [7]$; **b.** $4x \equiv 6\ [10]$; **c.** $x^2 \equiv 4\ [12]$; **d.** $x^2 + x \equiv 0\ [6]$.

Exercice 15 : divisibilité pour tout entier ⋆⋆⋆

a. À l'aide d'un tableau de congruences modulo 6, démontrer que pour tout entier n, l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier. (On rappelle que c'est la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.)

c. Démontrer que pour tout entier n, l'entier $n^5 - n$ est divisible par 5.

Exercice 16 : récurrence ou congruences ⋆⋆⋆

On veut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

a. **Par récurrence.** Vérifier que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n$, puis rédiger la démonstration.

b. **Avec les congruences.** Remarquer que $3^{2n} = 9^n$ et que $9 \equiv 2\ [7]$, puis conclure.

Exercice 17 : sommes de carrés ⋆⋆⋆

a. Démontrer que le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

b. En déduire que la somme de deux carrés n'est jamais congrue à 3 modulo 4.

c. L'entier 2 027 peut-il s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers ?

d. Démontrer que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ n'a aucune solution $(x\,;y)$ dans $\mathbb{Z}^2$. *Indication : raisonner modulo 5.*

Exercice 18 : la clé des codes-barres ⋆⋆⋆

Un code-barres EAN-13 est formé de 13 chiffres $c_1c_2\dots c_{13}$; le dernier, c_{13}, est une **clé de contrôle**. On calcule

$$S = (c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{13}) + 3\,(c_2 + c_4 + \dots + c_{12}).$$

Le code est valide lorsque $S \equiv 0\ [10]$.



a. Vérifier que le code 3 760152 840028 est valide.

b. Déterminer la clé du code dont les douze premiers chiffres sont 3 590123 45678.

c. Un employé recopie le code de la question a. en se trompant sur un chiffre : il écrit 3 760152 849028. Ce code est-il valide ?

d. Démontrer que si l'on se trompe sur un seul chiffre, le code obtenu n'est jamais valide. *(On étudiera k et $3k$ modulo 10 pour $1 \leqslant |k| \leqslant 9$.)*

Exercice 19 : les rangs d'élèves ⋆⋆⋆

Le nombre N d'élèves d'un lycée est compris entre 300 et 400. Lorsqu'ils se rangent par 5, il en reste 2 ; lorsqu'ils se rangent par 7, il en reste 3.

a. Traduire les données par deux congruences.

b. Déterminer le seul entier N_0 de $[0\,;35[$ qui vérifie ces deux congruences.

c. Montrer que $N - N_0$ est divisible par 5 et par 7. On admet qu'un entier divisible par 5 et par 7 est divisible par 35 (ce résultat sera démontré dans le chapitre suivant). En déduire les valeurs possibles de N.

d. Lorsqu'ils se rangent par 4, il n'en reste aucun. Combien y a-t-il d'élèves ?

Série D ⋆⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 20 : deux méthodes ⋆⋆⋆

On veut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $u_n = 4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

a. **Par récurrence.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de n, puis conclure.

b. **Avec les congruences.** Déterminer les restes de 4^n modulo 9 suivant les valeurs de n (on cherchera une puissance de 4 congrue à 1), puis étudier u_n modulo 9 dans chacun des cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.

Exercice 21 : $n^2 + n + 1$ ⋆⋆⋆

a. Dresser le tableau des restes de $n^2 + n + 1$ modulo 7 suivant les restes de n modulo 7.

b. En déduire les entiers n pour lesquels $n^2 + n + 1$ est divisible par 7. Donner les quatre plus petits entiers naturels qui conviennent.

c. Démontrer que $n^2 + n + 1$ n'est jamais divisible par 5.

Exercice 22 : Python, restes des puissances ⋆⋆⋆

Python

```
def reste_puissance(a, n, m):
    r = 1
    for k in range(n):
        r = (r * a) % m
    return r

def periode(a, m):
    k = 1
    p = a % m
    while p != 1:
        p = (p * a) % m
        k = k + 1
    return k
```

a. Que calcule la fonction `reste_puissance(a, n, m)` ? Pourquoi peut-on remplacer le produit par son reste modulo m à chaque étape ?

b. Que renvoie `reste_puissance(2, 2026, 7)` ? Comparer avec l'exercice 11.

c. Que renvoie la fonction `periode(a, m)` ? Calculer à la main `periode(2, 7)` et `periode(2, 5)`.

d. Sachant que `periode(3, 7)` renvoie 6, déterminer le reste de 3^{2026} dans la division par 7.

e. Que se passe-t-il lors de l'appel `periode(2, 4)` ? Expliquer.

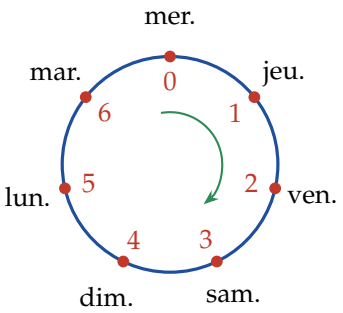
Exercice 23 : les jours de la semaine ⋆⋆⋆

Le mercredi 28 octobre 2026, on numérote les jours de la semaine de 0 à 6 à partir du mercredi (mercredi : 0, jeudi : 1, . . . , mardi : 6). Dans j jours, on sera le jour dont le numéro est le reste de j modulo 7.

a. L'année 2027 n'est pas bissextile. Quel jour de la semaine sera le 28 octobre 2027 ?

b. Déterminer le reste de 10^{10} modulo 7 (on pourra montrer que $10^3 \equiv -1\ [7]$). Quel jour de la semaine serons-nous dans 10^{10} jours ?

c. Même question dans 2^{100} jours.



Exercice 24 : des divisibilités par congruences ⋆⋆⋆⋆

Démontrer que pour tout entier naturel n :

a. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 ; *indication : exprimer* 3^{2n+1} *et* 2^{n+2} *à l'aide de* 9^n *et de* 2^n ;

b. $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.

Exercice 25 : sommes de trois carrés ⋆⋆⋆⋆

a. Dresser le tableau des restes de x^2 modulo 8 et vérifier que le carré d'un entier est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

b. En déduire qu'un entier congru à 7 modulo 8 n'est jamais la somme de trois carrés d'entiers.

c. L'entier 2 023 est-il la somme de trois carrés ? Donner les entiers de 1 à 30 qui ne sont pas sommes de trois carrés d'après la question b.