Terminale Maths expertes

PGCD. Théorèmes de Bézout et de Gauss

Devoir surveillé **Durée : 1 heure** **Calculatrice autorisée**

Barème indicatif : Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte.

Exercice 1 : Algorithme d'Euclide et bouquets (5 points)

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(1078\,;322)$.
2. En remontant l'algorithme, déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que $1078u + 322v = 14$.
3. Un fleuriste dispose de 1 078 roses et de 322 tulipes. Il veut composer le plus grand nombre possible de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs. Combien de bouquets peut-il composer et quelle est la composition de chacun ?
4. Écrire la fraction $\dfrac{1078}{322}$ sous forme irréductible, en justifiant qu'elle est bien irréductible.

Exercice 2 : PGCD et théorème de Gauss (5 points)

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, les entiers $3n + 5$ et $2n + 3$ sont premiers entre eux.
2. Soit n un entier naturel non nul. On note $d = \text{PGCD}(n + 5\,;2n - 1)$.
   a. Montrer que d divise 11.
   b. Déterminer les entiers naturels non nuls n pour lesquels $d = 11$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5(x - 3) = 7(y + 1)$.

Exercice 3 : Ballons et chasubles (5 points)

Un club de basket dépense exactement 200 € pour acheter x ballons à 11 € l'un et y chasubles à 7 € l'une. On considère l'équation (E) : $11x + 7y = 200$, d'inconnues x et y entiers relatifs.

1. Justifier que l'équation (E) admet des solutions.
2. Vérifier que le couple $(15\,;5)$ est solution de (E).
3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
4. En déduire toutes les possibilités d'achat du club.
5. Le club a acheté au moins 5 ballons, et plus de chasubles que de ballons. Combien a-t-il acheté de ballons et de chasubles ?

Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. PGCD$(84\,;126)$ est égal à :
a. 6 **b.** 14 **c.** 42 **d.** 252

2. Si PGCD$(a\,;b) = 6$, alors PGCD$(5a\,;5b)$ est égal à :
a. 6 **b.** 30 **c.** 11 **d.** 5

3. Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si :
a. a et b sont des nombres premiers **b.** a et b sont impairs
c. il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$ **d.** a ne divise pas b

4. L'équation $6x + 15y = 4$, d'inconnues entières x et y :
a. n'a aucune solution **b.** a une infinité de solutions
c. a une unique solution **d.** a exactement deux solutions

5. Si x est un entier tel que 12 divise $7x$, alors :
a. 7 divise x **b.** 84 divise x **c.** $x = 12$ **d.** 12 divise x