Terminale Maths expertes

PGCD. Théorèmes de Bézout et de Gauss

Fiche d'exercices

Dans toute la fiche, les lettres désignent des entiers relatifs, sauf mention contraire. Les exercices sont rangés par difficulté croissante ; la série D rassemble quatre problèmes tirés de situations concrètes.

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : diviseurs communs ⋆

a. Écrire la liste des diviseurs positifs de 54 et celle des diviseurs positifs de 72. En déduire $\text{PGCD}(54\,;72)$.

b. Donner, en citant la propriété utilisée : $\text{PGCD}(-54\,;72)$, $\text{PGCD}(0\,;-17)$, $\text{PGCD}(91\,;7)$ et $\text{PGCD}(1\,;2\,026)$.

Exercice 2 : algorithme d'Euclide ⋆

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le PGCD des entiers suivants :

a. 1 071 et 462 ; **b.** 2 028 et 1 638 ; **c.** 10 395 et 2 002.

Exercice 3 : fractions irréductibles ⋆

À l'aide du PGCD du numérateur et du dénominateur, écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1\,071}{462} \quad \text{et} \quad \frac{2\,618}{3\,553}.$$

Exercice 4 : premiers entre eux ? ⋆

Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

a. 35 et 48 ; **b.** 51 et 85 ; **c.** 91 et 143 ; **d.** $2n+1$ et $2n+3$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 5 : vrai ou faux ⋆⋆

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier (démonstration ou contre-exemple). Les entiers a, b, c et n sont des entiers naturels non nuls.

(1) Si $\text{PGCD}(a\,;b) = 3$, alors $\text{PGCD}(2a\,;2b) = 6$.

(2) S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 2$, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = 2$.

(3) Si a divise bc, alors a divise b ou a divise c.

(4) Si 3 divise n et 5 divise n, alors 15 divise n.

(5) Si 4 divise n et 6 divise n, alors 24 divise n.

(6) Deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

Exercice 6 : une égalité de Bézout à vue ⋆⋆

Pour chaque couple $(a\,;b)$, trouver sans algorithme deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$, puis conclure.

a. $(3\,;5)$; **b.** $(4\,;9)$; **c.** $(11\,;12)$.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 7 : PGCD avec un paramètre ⋆⋆

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(n\,;n+1)=1$.

b. Démontrer que $\text{PGCD}(n+3\,;n)=\text{PGCD}(n\,;3)$. En déduire les valeurs possibles de $\text{PGCD}(n+3\,;n)$, puis les entiers n pour lesquels ce PGCD vaut 3.

c. Calculer $2\,(5n+3)-5\,(2n+1)$. Que peut-on en déduire pour les entiers $5n+3$ et $2n+1$?

Exercice 8 : somme et PGCD donnés ⋆⋆

Déterminer tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que

$$a+b=84 \qquad \text{et} \qquad \text{PGCD}(a\,;b)=12.$$

Indication : écrire $a=12a'$ et $b=12b'$ avec a' et b' premiers entre eux.

Exercice 9 : produit et PGCD donnés ⋆⋆

Déterminer tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels, avec $a\leqslant b$, tels que

$$ab=1\,512 \qquad \text{et} \qquad \text{PGCD}(a\,;b)=6.$$

Exercice 10 : théorème de Gauss ⋆⋆

a. Déterminer les entiers n tels que 8 divise $15n$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\,;y)$ tels que $9x=14y$.

c. Un entier n est divisible par 6 et par 35. Démontrer qu'il est divisible par 210.

Exercice 11 : de l'algorithme d'Euclide à Bézout ⋆⋆

a. Déterminer $\text{PGCD}(221\,;91)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

b. En remontant l'algorithme, trouver deux entiers u et v tels que $221u+91v=\text{PGCD}(221\,;91)$.

c. Les équations $221x+91y=26$ et $221x+91y=30$ ont-elles des solutions entières ? Si oui, en donner une.

Exercice 12 : une première équation ⋆⋆

a. Vérifier que le couple $(-1\,;2)$ est solution de l'équation $7x+4y=1$, puis résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

b. En déduire les solutions entières de l'équation $7x+4y=3$.

Exercice 13 : simplifier avant de résoudre ⋆⋆⋆

a. Calculer $\text{PGCD}(15\,;21)$. L'équation $15x-21y=5$ a-t-elle des solutions entières ?

b. Montrer que l'équation $15x-21y=6$ équivaut à $5x-7y=2$, puis la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$.

Série C ⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 14 : un PGCD qui dépend de n ⋆⋆⋆

Pour tout entier naturel n, on pose $a = n + 5$, $b = 2n + 3$ et $d = \text{PGCD}(a\,;b)$.

a. Calculer $2a - b$. En déduire que d vaut 1 ou 7.

b. Démontrer que $d = 7$ si, et seulement si, $n \equiv 2\ [7]$.

c. Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{n+5}{2n+3}$ est-elle irréductible ?

Exercice 15 : points à coordonnées entières d'une droite ⋆⋆⋆

Dans un repère du plan, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $5x - 3y = 2$.

a. Vérifier que le point $A(1\,;1)$ appartient à $\mathcal{D}$.

b. Déterminer tous les points de $\mathcal{D}$ dont les deux coordonnées sont entières.

c. Combien de ces points ont une abscisse comprise entre 0 et 20 ? Les citer.

Exercice 16 : inverse modulo 26 ⋆⋆⋆

a. Démontrer que 9 et 26 sont premiers entre eux, puis trouver deux entiers u et v tels que $9u + 26v = 1$.

b. En déduire un entier u tel que $9u \equiv 1\ [26]$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $9x \equiv 4\ [26]$ *(on pourra multiplier les deux membres par u).*

Exercice 17 : deux restes imposés ⋆⋆⋆

On cherche les entiers n dont le reste dans la division par 5 est 2, et le reste dans la division par 7 est 3.

a. Montrer que n convient si, et seulement si, il existe deux entiers a et b tels que $n = 5a + 2 = 7b + 3$, c'est-à-dire $5a - 7b = 1$.

b. Résoudre l'équation $5a - 7b = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$.

c. En déduire que les entiers cherchés sont les entiers $n = 17 + 35k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Quel est le plus petit d'entre eux supérieur à 100 ?

Exercice 18 : premier avec deux entiers ⋆⋆⋆⋆

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.

a. On suppose $\text{PGCD}(a\,;b) = 1$ et $\text{PGCD}(a\,;c) = 1$. En multipliant membre à membre deux égalités de Bézout, démontrer que $\text{PGCD}(a\,;bc) = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, n et $(n+1)^2$ sont premiers entre eux.

c. La réciproque de la propriété démontrée en a. est-elle vraie ?

Exercice 19 : deux suites, des termes consécutifs premiers entre eux ⋆⋆⋆⋆

a. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 2^n - 1$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis démontrer que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

b. La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Démontrer que $\text{PGCD}(F_{n+2}\,;F_{n+1}) = \text{PGCD}(F_{n+1}\,;F_n)$, puis, par récurrence, que deux termes consécutifs de la suite sont toujours premiers entre eux.

Exercice 20 : Python, la proportion de couples premiers entre eux ⋆⋆⋆

Python

```
def pgcd(a, b):
    while ...... :
        a, b = ...... , ......
    return a

compte = 0
for a in range(1, 101):
    for b in range(1, 101):
        if ...... :
            compte = compte + 1
print(compte / 10000)
```

a. Compléter la fonction `pgcd` pour qu'elle applique l'algorithme d'Euclide.

b. Compléter la condition de la ligne 9 pour que le programme compte les couples $(a\,;b)$, avec $1 \leqslant a \leqslant 100$ et $1 \leqslant b \leqslant 100$, formés d'entiers premiers entre eux.

c. Que représente le nombre affiché ?

d. Le programme affiche `0.6087`. Comparer avec $\dfrac{6}{\pi^2}$, valeur limite de cette proportion lorsqu'on remplace 100 par des entiers de plus en plus grands.

Série D Problèmes en situation concrète

Exercice 21 : découper une plaque ⋆⋆

Un menuisier dispose d'une plaque de contreplaqué rectangulaire de 336 cm sur 240 cm. Il veut la découper entièrement, sans aucune perte, en carrés identiques dont le côté mesure un nombre entier de centimètres.

a. Expliquer pourquoi la longueur c du côté d'un carré doit diviser 336 et 240.

b. Quelle est la plus grande longueur c possible ? Combien de carrés obtient-il alors ?

c. Pour fabriquer des étagères, il veut des carrés d'au moins 20 cm de côté. Donner toutes les possibilités, avec le nombre de carrés obtenus dans chaque cas.

Exercice 22 : la recette d'un spectacle ⋆⋆⋆

Pour son spectacle de fin d'année, une association vend des billets à 7 € pour les adultes et à 4 € pour les enfants. La recette d'une séance s'élève à 100 €.
On note x le nombre de billets adultes et y le nombre de billets enfants vendus.

a. Justifier que $7x + 4y = 100$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 4y = 100$ *(on pourra partir de l'égalité* $7 \times (-1) + 4 \times 2 = 1$*).*

c. Déterminer toutes les répartitions possibles des billets vendus.

d. On sait de plus que 22 billets ont été vendus. Combien d'adultes et combien d'enfants ont assisté à la séance ?

Exercice 23 : deux bus au même arrêt ⋆⋆⋆

Sur une même ligne, le bus A s'arrête à l'arrêt « Lycée » toutes les 14 minutes à partir de 7 h 00, et le bus B toutes les 22 minutes à partir de 7 h 06. Les deux bus circulent jusqu'au soir.

a. Montrer que les deux bus sont à l'arrêt au même instant si, et seulement si, il existe deux entiers naturels x et y tels que $14x = 6 + 22y$, c'est-à-dire $7x - 11y = 3$.

b. Résoudre l'équation $7x - 11y = 3$ dans $\mathbb{Z}^2$.

c. Donner toutes les heures, entre 7 h et 13 h, auxquelles les deux bus sont à l'arrêt en même temps.

d. À la rentrée, le bus B part à 7 h 05 au lieu de 7 h 06. Les deux bus peuvent-ils encore se trouver à l'arrêt en même temps ? Justifier.

Exercice 24 : un message chiffré ⋆⋆⋆⋆

On numérote les lettres de l'alphabet de 0 à 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chiffrer une lettre de numéro x, on calcule le reste y de la division de $5x + 3$ par 26 : la lettre est remplacée par la lettre de numéro y. Ainsi, $y \equiv 5x + 3\ [26]$ avec $0 \leqslant y \leqslant 25$.

a. Chiffrer le mot GAUSS.

b. Démontrer que 5 et 26 sont premiers entre eux, puis trouver un entier u tel que $5u \equiv 1\ [26]$.

c. Démontrer que $y \equiv 5x + 3\ [26]$ si, et seulement si, $x \equiv 21y + 15\ [26]$. En déduire comment déchiffrer une lettre.

d. Déchiffrer le message XZNGRSX.

e. Un camarade propose de chiffrer avec $y \equiv 13x + 3\ [26]$. Calculer les lettres chiffrées de A et de C. Pourquoi ce chiffrement ne convient-il pas ?