Terminale Maths expertes

Les nombres premiers

Devoir surveillé **Durée : 1 heure** **Calculatrice autorisée**

Barème indicatif : Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte.

Exercice 1 : Primalité et décomposition (5 points)

1. **a.** Le nombre 391 est-il premier ?
   b. Démontrer que 397 est un nombre premier, en justifiant la liste des divisions effectuées.
2. Décomposer 2520 et 756 en produit de facteurs premiers.
3. Combien 2520 a-t-il de diviseurs positifs ?
4. En déduire $\text{PGCD}(2520\,;756)$ et $\text{PPCM}(2520\,;756)$.
5. Déterminer le plus petit entier naturel non nul k tel que $756k$ soit le carré d'un entier.

Exercice 2 : Engrenages et plaque (5 points)

Dans une machine, deux roues dentées A et B engrènent : A a 84 dents et B en a 60. Au départ, on marque d'un trait de peinture une dent de A et une dent de B qui sont en contact.

1. Décomposer 84, 60 et 126 en produit de facteurs premiers.
2. Au bout de combien de tours de chaque roue les deux dents marquées se retrouvent-elles en contact pour la première fois ?
3. On ajoute une troisième roue C, de 126 dents, qui engrène avec B. Chaque roue porte un repère, tourné vers le haut au départ. Au bout de combien de tours de chaque roue les trois repères se retrouvent-ils pour la première fois, simultanément, tournés vers le haut ?
4. Dans une plaque rectangulaire de 84 cm sur 60 cm, un artisan veut découper, sans perte, des carrés identiques les plus grands possible. Quel est le côté de ces carrés, et combien en obtient-il ?

Exercice 3 : Petit théorème de Fermat (5 points)

1. **a.** Justifier que $2^{12} \equiv 1\ [13]$.
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2026} par 13.
2. Soit n un entier relatif.
   a. Justifier que $n^7 \equiv n\ [7]$.
   b. Démontrer que $n^7 \equiv n\ [2]$ et que $n^7 \equiv n\ [3]$.
   c. En déduire que, pour tout entier relatif n, le nombre $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 est :
a. 9 **b.** 10 **c.** 11 **d.** 15

2. Le nombre 437 :
a. est premier **b.** est égal à 7×61 **c.** est égal à 19×23 **d.** est égal à 17×27

3. Le nombre $2^4 \times 3^2$ a pour nombre de diviseurs positifs :
a. 6 **b.** 8 **c.** 24 **d.** 15

4. PPCM $\left(2^2 \times 3 \times 5 \,;\, 2 \times 3^2 \times 7\right)$ est égal à :
a. $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ **b.** 2×3 **c.** $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$ **d.** $2 \times 3 \times 5 \times 7$

5. Si p est un nombre premier qui ne divise pas l'entier a, alors :
a. $a^p \equiv 1\ [p]$ **b.** $a^{p-1} \equiv 0\ [p]$ **c.** $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ **d.** $a^p \equiv 0\ [p]$