Terminale Maths expertes

Matrices et suites

Cours

Les matrices sont des tableaux de nombres sur lesquels on sait calculer. Elles servent à résoudre des systèmes, à décrire des transformations du plan et à étudier des suites liées entre elles ; au chapitre 6, elles serviront aussi à étudier les graphes et les chaînes de Markov.

I. Matrices

Définition 1 : matrice

Soit m et p deux entiers naturels non nuls. Une **matrice de taille** $m \times p$ est un tableau de nombres réels comportant m lignes et p colonnes. Le nombre situé sur la ligne i et la colonne j est le **coefficient** d'indice (i, j) ; on le note a_{ij} et on écrit $A = (a_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont **égales** si elles ont la même taille et les mêmes coefficients aux mêmes places.

Définition 2 : matrices particulières

• Une matrice de taille $n \times n$ est une **matrice carrée d'ordre** n ; ses coefficients $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forment sa **diagonale**.
• Une matrice de taille $1 \times p$ est une **matrice ligne** ; une matrice de taille $m \times 1$ est une **matrice colonne**.
• La **matrice nulle** a tous ses coefficients nuls. Une matrice carrée est **diagonale** si tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls.
• La **matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1.

Exemples :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ est de taille 2×3 ; $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne ; $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale ;
$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans un repère, le point $M(x\,;y)$ est souvent représenté par la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de ses coordonnées.

II. Opérations sur les matrices

1. Somme et produit par un réel

Définition 3 : somme, produit par un réel

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices **de même taille** et k un réel.
• $A + B$ est la matrice de coefficients $a_{ij} + b_{ij}$: on additionne les coefficients placés au même endroit.
• kA est la matrice de coefficients $k\,a_{ij}$: on multiplie chaque coefficient par k. On note $-A = (-1)A$ et $A - B = A + (-B)$.

Remarque

Ces opérations ont les mêmes règles de calcul que pour les nombres : $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $k(A + B) = kA + kB$, $(k + k')A = kA + k'A$.

2. Produit de deux matrices

Définition 4 : produit

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $m \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de taille $p \times q$: **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.**
Le produit AB est la matrice de taille $m \times q$ dont le coefficient d'indice (i, j) est obtenu en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B, terme à terme, puis en additionnant :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{kj}.$$

Méthode 1 : calculer un produit de matrices

Énoncé. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

Solution. Pour le coefficient $(1, 1)$ de AB, on multiplie la ligne 1 de A par la colonne 1 de B : $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$. De même pour les autres :

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times 0 + 2\times 4 \\ 3\times 2 + (-1)\times 1 & 3\times 0 + (-1)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

On constate que $AB \neq BA$.

Propriété 1 : règles de calcul

Lorsque les produits sont définis, et pour tout réel k :
a. $(AB)C = A(BC)$ (associativité) ; on note simplement ABC.
b. $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité) ; $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.
c. Si A est carrée d'ordre n : $AI_n = I_nA = A$ (I_n joue le rôle du nombre 1).

Attention : deux différences avec les nombres

• En général, $AB \neq BA$: **le produit n'est pas commutatif**, et l'ordre des facteurs compte.
• Un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 1 : calcul matriciel

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $2A - B$.

.....

b. Calculer AB et BA. Ces deux matrices sont-elles égales ?

.....

.....

.....

c. Les produits AC et CA sont-ils définis ? Calculer celui qui l'est.

.....

.....

.....

3. Puissances d'une matrice carrée

Définition 5 : puissance

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On pose $A^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $A^{k+1} = A^k \times A$. Ainsi, pour $k \geqslant 1$, $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ (k facteurs).

Propriété 2 : puissances d'une matrice diagonale

Si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n : $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$. (Même résultat à l'ordre 3.)

Démonstration

Par récurrence sur n. **Initialisation :** $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & b^0 \end{pmatrix}$.

Hérédité : si $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ pour un entier k, alors

$$D^{k+1} = D^k \times D = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k \times a + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + b^k \times b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Méthode 2 : conjecturer puis démontrer une formule pour A^n

Énoncé. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Solution. On calcule les premières puissances : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On conjecture : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On démontre par récurrence. Pour $n = 0$: $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice d'application 2 : puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3.

.....

.....

b. Conjecturer l'expression de A^n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

.....

.....

.....

.....

.....

III. Matrices inversibles et systèmes linéaires

1. Matrice inverse

Définition 6 : matrice inversible

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Cette matrice B est alors unique (propriété 3) : on l'appelle l'**inverse** de A et on la note A^{-1}.

Propriété 3 : unicité de l'inverse

Si B et C vérifient $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$, alors $B = C$.

Démonstration

On utilise l'associativité : $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.

Théorème 1 : inverse d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On appelle **déterminant** de A le réel $\det(A) = ad - bc$.
A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration

On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Un calcul direct donne

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = (ad-bc)\,I_2 \qquad \text{et de même} \qquad BA = (ad-bc)\,I_2.$$

Si $ad-bc \neq 0$ **:** $A \times \dfrac{1}{ad-bc}B = \dfrac{1}{ad-bc}B \times A = I_2$, donc A est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{ad-bc}B$.
Si $ad-bc = 0$ **:** alors AB est la matrice nulle. Si A était inversible, on aurait $B = I_2B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \times 0 = 0$, donc $a = b = c = d = 0$, c'est-à-dire $A = 0$; or la matrice nulle n'est pas inversible ($0 \times B' = 0 \neq I_2$ pour toute matrice B'). Contradiction : A n'est pas inversible.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$: $\det(A) = 3 \times 2 - 1 \times 5 = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible : son déterminant vaut $2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$.

Remarque

Pour une matrice d'ordre 3, on obtient l'inverse (s'il existe) avec la calculatrice ou un logiciel ; on peut ensuite vérifier le résultat en calculant le produit AA^{-1}.

2. Écriture matricielle d'un système linéaire

Propriété 4 : résolution d'un système

Un système linéaire de n équations à n inconnues s'écrit $AX = B$, où A est la matrice carrée des coefficients, X la colonne des inconnues et B la colonne des seconds membres.
Si A est inversible, le système a une **unique solution** : $X = A^{-1}B$.

Démonstration

Si X **est solution :** $AX = B$, donc $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Or $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X$: donc $X = A^{-1}B$.
Réciproquement, $X = A^{-1}B$ vérifie $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_nB = B$: c'est bien une solution.

Méthode 3 : résoudre un système à l'aide d'une matrice inverse

Énoncé. Résoudre le système $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

Solution. Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$. D'après l'exemple précédent, A est inversible, donc

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-9 \\ -25+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution est le couple $(x\,;y) = (1\,;2)$. On vérifie : $3+2 = 5$ et $5+4 = 9$.

Méthode 4 : trouver une parabole passant par trois points (interpolation)

Énoncé. Déterminer la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $(0\,;1)$, $(1\,;2)$ et $(2\,;5)$.

Solution. Les conditions $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=5$ donnent le système

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=5 \end{cases} \iff MX=B \quad \text{avec} \quad M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La calculatrice donne $M^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $X=M^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $f(x)=x^2+1$.

Exercice d'application 3 : inverse et système

a. Justifier que $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

.....

.....

b. En déduire la solution du système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}$

.....

.....

.....

c. Pour quelles valeurs du réel m la matrice $\begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

.....

.....

IV. Matrices et transformations du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On associe au point $M(x\,;y)$ la colonne $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et, quand c'est utile, le nombre complexe $z=x+iy$ (chapitre 1).

Définition 7 : matrice d'une transformation

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La transformation f **de matrice** A associe au point $M(x\,;y)$ le point $M'(x'\,;y')$ tel que

$$X'=AX, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

Les colonnes de A sont les coordonnées des images des points $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Le point O est toujours fixe.

Propriété 5 : premières transformations

Transformation	**Image de** $M(x\,;y)$	**Matrice**
Symétrie de centre O	$(-x\,;-y)$	$-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Symétrie d'axe (Ox)	$(x\,;-y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Symétrie d'axe (Oy)	$(-x\,;y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symétrie d'axe la droite $y = x$	$(y\,;x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Homothétie de centre O et de rapport k	$(kx\,;ky)$	$kI_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Projection orthogonale sur (Ox)	$(x\,;0)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration

Dans chaque cas, on lit les coordonnées de M' sur la figure, puis on écrit x' et y' sous la forme $ax + by$ et $cx + dy$. Par exemple, pour la symétrie d'axe $y = x$: $x' = y = 0 \times x + 1 \times y$ et $y' = x = 1 \times x + 0 \times y$, d'où la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 2 : matrice d'une rotation

La rotation de centre O et d'angle θ a pour matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration

D'après le chapitre 1, la rotation de centre O et d'angle θ s'écrit $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$. Avec $z = x + iy$:

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta).$$

On identifie les parties réelles et imaginaires : $x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y$ et $y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y$, ce qui est l'écriture $X' = R_\theta X$.

Exemple

$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: le point $A(2\,;1)$ a pour image $A'(-1\,;2)$. $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$: c'est la symétrie de centre O.

Propriété 6 : composée de deux transformations

Si f a pour matrice A et g a pour matrice B, alors la transformation $g \circ f$ (on applique f, **puis** g) a pour matrice le produit BA.

Démonstration

Soit M de colonne X. Son image par f a pour colonne $X' = AX$, et l'image de ce point par g a pour colonne $X'' = BX' = B(AX) = (BA)X$ par associativité. Donc $g \circ f$ a pour matrice BA.

Exemple : l'ordre compte

Soit s la symétrie d'axe (Ox), de matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, de matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$r \circ s$ a pour matrice $RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est la symétrie d'axe $y = x$.

$s \circ r$ a pour matrice $SR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est la symétrie d'axe $y = -x$. Les deux composées sont différentes.

Propriété 7 : composée de deux rotations

Pour tous réels θ et φ : $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$. En particulier, R_θ est inversible, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, et pour tout entier naturel n, $R_\theta^n = R_{n\theta}$.

Démonstration

D'après la propriété 6, $R_\theta R_\varphi$ est la matrice de la transformation $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} z\right) = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)} z$, c'est-à-dire de la rotation d'angle $\theta + \varphi$: c'est $R_{\theta+\varphi}$.
Alors $R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = R_0 = I_2$, donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. Enfin $R_\theta^n = R_{n\theta}$ s'obtient par récurrence : $R_\theta^{k+1} = R_\theta^k R_\theta = R_{k\theta} R_\theta = R_{(k+1)\theta}$.

Remarque : on retrouve les formules d'addition

En effectuant le produit $R_\theta R_\varphi$ et en l'identifiant à $R_{\theta+\varphi}$, on obtient :
$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$ et $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$.

Propriété 8 : symétrie d'axe une droite passant par O

Soit D_α la droite passant par O qui fait un angle α avec l'axe (Ox). La symétrie d'axe D_α a pour matrice

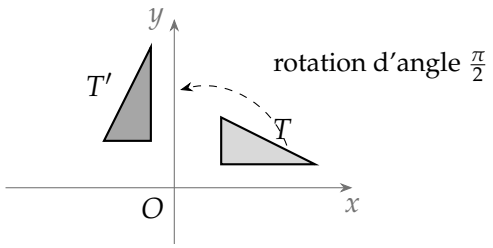
$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Démonstration

On obtient cette symétrie en trois temps : on tourne de $-\alpha$ (la droite D_α vient sur (Ox)), on applique la symétrie d'axe (Ox), puis on tourne de α. D'après la propriété 6, sa matrice est $R_\alpha\, S_0\, R_{-\alpha}$. En notant $c = \cos\alpha$ et $s = \sin\alpha$:

$$R_\alpha S_0 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \qquad R_\alpha S_0 R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2sc \\ 2sc & s^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $c^2 - s^2 = \cos 2\alpha$ et $2sc = \sin 2\alpha$, on obtient S_α. (Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on retrouve la symétrie d'axe $y = x$.)



Le triangle T de sommets $(1\,;0{,}5)$, $(3\,;0{,}5)$, $(1\,;1{,}5)$ a pour image par la rotation de matrice $R_{\pi/2}$ le triangle T' de sommets $(-0{,}5\,;1)$, $(-0{,}5\,;3)$, $(-1{,}5\,;1)$: on applique la matrice à chaque sommet.

Exercice d'application 4 : transformations et matrices

a. Écrire la matrice R de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer les coordonnées des images de $A(2\,;0)$ et de $B(0\,;2)$.

.....

.....

.....

b. Sans calcul, que vaut R^6 ? Justifier.

.....

c. Soit s_1 la symétrie d'axe (Ox) et s_2 la symétrie d'axe la droite $y = x$. Calculer la matrice de $s_2 \circ s_1$ et reconnaître cette transformation.

.....

.....

.....

V. Suites de matrices colonnes

1. Écriture matricielle d'une récurrence

Exemples :

• **Deux suites liées.** Si $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n + 3$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$:

$U_{n+1} = AU_n + C$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• **Une récurrence d'ordre 2.** Si $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$:

$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_n$.

Propriété 9 : terme général

Soit A une matrice carrée et (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n$. Alors, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n\, U_0.$$

Démonstration

Par récurrence. **Initialisation :** $A^0 U_0 = I\, U_0 = U_0$.
Hérédité : si $U_k = A^k U_0$, alors $U_{k+1} = AU_k = A\left(A^k U_0\right) = \left(AA^k\right) U_0 = A^{k+1} U_0$ (les puissances de A commutent avec A).
Conclusion : pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

Exercice d'application 5 : deux suites liées

On considère les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

a. Écrire la relation sous la forme $U_{n+1} = AU_n$, en précisant A et U_0.

.....

.....

b. Calculer U_1, U_2 et U_3, puis A^3. Vérifier que $U_3 = A^3U_0$.

.....

.....

.....

.....

2. Suites vérifiant $U_{n+1} = AU_n + C$

Définition 8 : convergence

Une suite (U_n) de matrices colonnes **converge** vers la colonne L si chacune des suites de coefficients converge vers le coefficient correspondant de L. On définit de même la convergence d'une suite de matrices carrées (A^n).

Propriété 10 : suite constante et limite éventuelle

Soit (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + C$.

a. La suite constante égale à L vérifie la relation si, et seulement si, $L = AL + C$, c'est-à-dire $(I - A)L = C$. Si $I - A$ est inversible : $L = (I - A)^{-1}C$.

b. Si (U_n) converge, sa limite L vérifie $L = AL + C$.

c. Si $L = AL + C$, alors pour tout entier naturel n : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$. Si de plus A^n tend vers la matrice nulle, (U_n) converge vers L.

Démonstration

a. $L = AL + C \iff L - AL = C \iff (I - A)L = C$, et si $I - A$ est inversible, la propriété 4 donne $L = (I - A)^{-1}C$.

b. Chaque coefficient de $AU_n + C$ est une somme de termes $a_{ij} \times$ (coefficient de U_n) et d'une constante : il tend vers le coefficient correspondant de $AL + C$. En passant à la limite dans $U_{n+1} = AU_n + C$, on obtient $L = AL + C$.

c. On pose $V_n = U_n - L$. Alors $V_{n+1} = U_{n+1} - L = (AU_n + C) - (AL + C) = A(U_n - L) = AV_n$. D'après la propriété 9, $V_n = A^nV_0$, soit $U_n = A^n(U_0 - L) + L$. Si les coefficients de A^n tendent vers 0, ceux de $A^n(U_0 - L)$ aussi, et U_n tend vers L.

Propriété 11 : calcul de A^n avec une matrice diagonale

S'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (c'est-à-dire $P^{-1}AP = D$), alors pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration

Par récurrence. Pour $n = 0$: $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$. Si $A^k = PD^kP^{-1}$, alors

$$A^{k+1} = A^kA = \left(PD^kP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^k\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Méthode 5 : étudier une suite $U_{n+1} = AU_n + C$

Énoncé. Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + C$. On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
a. Déterminer la suite constante. **b.** Calculer $P^{-1}AP$, puis A^n. **c.** En déduire la limite de (U_n).

Solution. a. $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $0{,}36 - 0{,}04 = 0{,}32 \neq 0$;
$L = (I - A)^{-1}C = \dfrac{1}{0{,}32}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$.
b. $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} = D$. Donc
$A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0{,}6^n + 0{,}2^n & 0{,}6^n - 0{,}2^n \\ 0{,}6^n - 0{,}2^n & 0{,}6^n + 0{,}2^n \end{pmatrix}$.
c. Comme $0 < 0{,}2 < 0{,}6 < 1$, $0{,}6^n$ et $0{,}2^n$ tendent vers 0 : A^n tend vers la matrice nulle. D'après la propriété 10, $U_n = A^n(U_0 - L) + L$ converge vers $L = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 6 : étude d'une suite $U_{n+1} = AU_n + C$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n + C$.

a. Déterminer la colonne L telle que $L = AL + C$.

.....

.....

.....

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = 0{,}5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

.....

.....

.....

.....

c. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis la limite de la suite (U_n).

.....

.....

.....

.....

VI. Algorithmique

On représente une matrice par la liste de ses lignes : $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ s'écrit `[[1, 2], [3, 4]]`. La fonction `produit` applique la définition 4 ; la fonction `puissance` applique la définition 5.

Python

```
def produit(A, B):
    m, p, q = len(A), len(B), len(B[0])
    C = [[0] * q for i in range(m)]
    for i in range(m):
        for j in range(q):
            for k in range(p):
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
    return C
```

Python

```
def puissance(A, n):
    m = len(A)
    P = [[0] * m for i in range(m)]
    for i in range(m):
        P[i][i] = 1       # P = I
    for k in range(n):
        P = produit(P, A)
    return P

print(puissance([[1, 1], [0, 1]], 5))
# [[1, 5], [0, 1]]
```

L'essentiel du chapitre

Produit Ligne i de A $\times$ colonne j de B ; nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B ; en général $AB \neq BA$.

Inverse (ordre 2) $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ inversible $\iff ad-bc \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Système $AX = B$ avec A inversible : $X = A^{-1}B$.

Transformations $X' = AX$; rotation : $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$; $g \circ f$ a pour matrice BA ; $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$.

Suites $U_{n+1} = AU_n \Rightarrow U_n = A^n U_0$; $U_{n+1} = AU_n + C$: $L = AL + C$ et $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

Puissances $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale $\Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$.