Terminale Maths expertes

Matrices et suites

Devoir surveillé **Durée : 1 heure** **Calculatrice autorisée**

Barème indicatif : Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte.

Exercice 1 : Calcul matriciel (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 4A + I_2$ est la matrice nulle.
2. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = 4I_2 - A$. Vérifier ce résultat à l'aide du déterminant.
3. Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$
4. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 : Transformations du plan (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et s la symétrie d'axe (Oy).

1. Écrire la matrice R de r et la matrice S de s. Calculer les coordonnées de l'image du point $A(2\,;0)$ par r.
2. Calculer R^3. Quelle transformation a pour matrice R^3 ?
3. Calculer la matrice M de la transformation $s \circ r$ (on applique r, puis s).
4. On rappelle que la symétrie d'axe la droite passant par O et faisant un angle α avec l'axe (Ox) a pour matrice $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$.
   Montrer que $s \circ r$ est une symétrie axiale dont on précisera l'axe. Vérifier que $M^2 = I_2$ et interpréter.

Exercice 3 : Deux réservoirs (5 points)

Deux réservoirs contiennent, au bout de n heures, u_n et v_n mètres cubes d'eau, avec $u_0 = 5$ et $v_0 = 25$. Chaque heure, chaque réservoir garde 60 % de son eau, en envoie 20 % dans l'autre réservoir, et perd le reste ; une source apporte en plus 3 m^3 dans chacun. Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 0{,}2\,v_n + 3 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 0{,}6\,v_n + 3.$$

1. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices A et C telles que $U_{n+1} = AU_n + C$, puis calculer U_1.
2. Déterminer la matrice colonne L telle que $L = AL + C$.
3. On pose $V_n = U_n - L$. Montrer que $V_{n+1} = AV_n$. Calculer AV_0 et en déduire, par récurrence, que $V_n = 0{,}4^n\,V_0$ pour tout entier naturel n.
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n, puis le comportement des deux réservoirs à long terme.

Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Si A est une matrice de taille 2×3 et B une matrice de taille 3×2, alors AB est :
a. de taille 3×3 **b.** de taille 2×2 **c.** de taille 2×3 **d.** non défini

2. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors M^{10} est égale à :
a. $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 1\,024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On considère $N = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
a. $N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $N^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **c.** N n'est pas inversible **d.** $N^{-1} = N$

4. La matrice de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est :
a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Si $A = PDP^{-1}$, où P est inversible et D diagonale, alors pour tout entier $n \geqslant 1$:
a. $A^n = P^n D^n P^{-n}$ **b.** $A^n = PD^nP^{-1}$ **c.** $A^n = D^n$ **d.** $A^n = P^{-1}D^nP$