Terminale Maths expertes

Matrices et suites

Fiche d'exercices

Les exercices sont rangés par difficulté croissante ; la série D rassemble six problèmes tirés de situations concrètes. Le symbole **(calc.)** signale qu'une calculatrice ou un logiciel est utile.

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : opérations ⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$, $3A - 2B$, AB, BA et A^2.

Exercice 2 : des produits de tailles différentes ⋆

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Parmi les produits MN, NM, MV et VM, lesquels sont définis ? Préciser leur taille.

b. Calculer les produits définis.

Exercice 3 : inverses ⋆

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : systèmes linéaires ⋆

a. Résoudre à l'aide d'une matrice inverse le système $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MM', puis résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{cases}$$

Exercice 5 : puissances ⋆

a. Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Donner D^n et E^n pour tout entier naturel n.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^2, puis donner B^n selon la parité de l'entier n.

Exercice 6 : reconnaître une transformation ⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Pour chacune des matrices suivantes, reconnaître la transformation associée et calculer l'image du point $A(4\,;-2)$.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad T_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : écriture matricielle ⋆

Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout n : $u_{n+1} = 3u_n - v_n + 1$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n - 4$.

a. Déterminer A et C telles que $U_{n+1} = AU_n + C$, où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. Calculer U_1 et U_2.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 8 : inverse à partir d'une relation ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $A^2 = 5A + 2I_2$.

b. En déduire que $A \times \dfrac{1}{2}(A - 5I_2) = I_2$. Que peut-on en conclure ? Donner A^{-1} et vérifier avec le déterminant.

Exercice 9 : puissances par récurrence ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n\,3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : une matrice nilpotente ⋆⋆

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_3 + N$.

a. Calculer N^2 et N^3.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = I_3 + n\,N + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.

c. En déduire A^{10}.

Exercice 11 : une rotation d'un huitième de tour ⋆⋆

Soit R la matrice de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Écrire R, puis calculer R^2. Reconnaître la transformation de matrice R^2.

b. Sans calcul supplémentaire, donner R^4 et R^8. Justifier.

c. Calculer l'image du point $A(2\,;0)$ par la rotation, puis déterminer $R^{2\,026}$.

Exercice 12 : composée de deux symétries axiales ⋆⋆

On note $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ la matrice de la symétrie d'axe la droite D_α passant par O et faisant un angle α avec (Ox).

a. Démontrer que $S_\alpha S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$, où R_θ est la matrice de la rotation d'angle θ.

b. Quelle est la nature de la composée de la symétrie d'axe (Ox) suivie de la symétrie d'axe $D_{\pi/3}$?

c. Calculer S_α^2 et interpréter géométriquement.

Exercice 13 : puissance à l'aide d'une matrice diagonale ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^{-1} et vérifier que $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

c. On reprend les suites de l'exercice d'application 5 du cours : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 14 : suite $U_{n+1} = AU_n + C$ ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + C$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la colonne L telle que $L = AL + C$.

b. Calculer P^2, puis $P^{-1}AP$. En déduire A^n.

c. Exprimer U_n en fonction de n et déterminer la limite de (U_n).

Série C ⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 15 : interpolation polynomiale ⋆⋆⋆

a. Déterminer la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par les points $(-1\,;6)$, $(1\,;2)$ et $(2\,;3)$, en écrivant un système sous forme matricielle.

b. **(calc.)** Déterminer la fonction polynôme g de degré au plus 3 dont la courbe passe par $(0\,;1)$, $(1\,;0)$, $(2\,;1)$ et $(3\,;10)$.

Exercice 16 : suite de Fibonacci et identité de Cassini ⋆⋆⋆

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

b. Vérifier que, pour toutes matrices M et M' d'ordre 2 : $\det(MM') = \det(M) \times \det(M')$.

c. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Vérifier pour $n = 5$.

Exercice 17 : matrices et nombres complexes ⋆⋆⋆

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (a, b réels), on associe la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tous complexes z et z' : $M(z)\,M(z') = M(zz')$.

b. On écrit $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$. Montrer que $M(z) = r\,R_\theta$ et interpréter la transformation de matrice $M(z)$.

c. En utilisant $(1+i)^8$, calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^8$ sans multiplier de matrices.

Exercice 18 : projection et symétrie ⋆⋆⋆

Soit $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et p la transformation de matrice P.

a. Calculer P^2. Interpréter : que se passe-t-il si l'on applique deux fois p ?

b. Soit $M(x\,;y)$ et $M' = p(M)$. Montrer que M' est sur la droite Δ d'équation $y = x$ et que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(1\,;1)$. Que représente p ?

c. P est-elle inversible ? Donner une interprétation géométrique.

d. Montrer que $S = 2P - I_2$ est la matrice de la symétrie d'axe Δ, puis vérifier que $S^2 = I_2$.

Exercice 19 : une suite récurrente d'ordre 2 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_{n+1} = AU_n$ et en déduire U_n en fonction de A, n et U_0.

b. Calculer P^{-1} et $D = P^{-1}AP$. En déduire A^n.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 2^n - (-1)^n$.

Série D Problèmes en situation concrète

Exercice 20 : les comptes d'une boulangerie ⋆

Une boulangerie a deux magasins. Le tableau donne les ventes d'une semaine.

	baguettes	croissants	pains au chocolat
magasin 1	300	150	120
magasin 2	250	200	90

Les prix de vente sont 1,10 €, 1,20 € et 1,40 € ; les coûts de fabrication 0,35 €, 0,45 € et 0,55 €.

a. On note Q la matrice 2×3 des ventes, V la colonne des prix et K celle des coûts. Calculer QV et interpréter.

b. Calculer $Q(V - K)$ et interpréter. Quel magasin dégage le plus grand bénéfice ?

Exercice 21 : le chiffrement de Hill ⋆⋆⋆

On numérote les lettres de $A = 0$ à $Z = 25$. Pour chiffrer un mot, on le découpe en blocs de deux lettres $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; chaque bloc est remplacé par le bloc Y dont les coefficients sont les restes modulo 26 des coefficients de KX, avec $K = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Chiffrer le mot `MATH`.

b. Soit $K' = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que les coefficients de $K'K$ sont congrus à ceux de I_2 modulo 26. En déduire que, si $Y \equiv KX$ (modulo 26), alors $X \equiv K'Y$.

c. Déchiffrer le message `RTEU`.

d. Un espion propose la clé $K_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $K_2 \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ et expliquer pourquoi cette clé est mauvaise.

Exercice 22 : la ville et la campagne ⋆⋆

Une région compte 500 000 habitants. En 2026, 300 000 vivent en ville et 200 000 à la campagne. Chaque année, 10 % des citadins partent à la campagne et 5 % des ruraux partent en ville ; la population totale reste stable. On note u_n et v_n les populations, en milliers, de la ville et de la campagne en $2026 + n$.

a. Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Calculer U_1 et U_2.

b. Justifier que $u_n + v_n = 500$, puis que $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n + 25$.

c. En déduire u_n en fonction de n, puis les populations à long terme.

d. Vérifier que la colonne limite L obtenue vérifie $AL = L$.

e. À partir de quelle année la ville comptera-t-elle moins de 170 000 habitants ?

Exercice 23 : lapins et renards ⋆⋆⋆

Dans une réserve, on note ℓ_n le nombre de lapins (en centaines) et r_n le nombre de renards au début de l'année n. Un modèle simplifié donne :

$$\ell_{n+1} = 0{,}6\,\ell_n - 0{,}2\,r_n + 24 \qquad \text{et} \qquad r_{n+1} = 0{,}1\,\ell_n + 0{,}7\,r_n + 1, \qquad \text{avec } \ell_0 = 40,\ r_0 = 10.$$

a. Interpréter les coefficients $-0{,}2$ et $0{,}1$.

b. Écrire le modèle sous la forme $U_{n+1} = AU_n + C$, puis calculer U_1 et U_2.

c. Déterminer la colonne L telle que $L = AL + C$.

d. On admet que A^n tend vers la matrice nulle. Que peut-on prévoir pour les deux populations ?

e. **(calc.)** Calculer U_3 et U_{10}. Que remarque-t-on pour les lapins ?

Exercice 24 : une animation graphique ⋆⋆

Dans un logiciel d'animation, on transforme un logo en lui appliquant la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, puis l'homothétie de centre O et de rapport 2.

a. Montrer que cette transformation a pour matrice $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

b. Calculer les images des points $(2\,;0)$ et $(0\,;1)$.

c. On admet qu'une transformation de matrice M multiplie les aires par $|\det(M)|$. Un logo d'aire 5 cm^2 a-t-il une image d'aire 10 ou 20 cm^2 ?

d. On applique six fois la transformation. Calculer M^6 et décrire le résultat.

e. Quelle matrice permet de revenir au logo initial après une transformation ?

Exercice 25 : un médicament dans l'organisme ⋆⋆⋆

Un patient reçoit une perfusion qui apporte 20 mg de médicament dans le sang toutes les heures. On note u_n et v_n les quantités (en mg) dans le sang et dans les tissus au bout de n heures, avec $u_0 = v_0 = 0$. En une heure, 50 % du médicament présent dans le sang y reste, 20 % passe dans les tissus et le reste est éliminé ; 80 % du médicament des tissus y reste, 10 % revient dans le sang et le reste est éliminé.

a. Justifier que $U_{n+1} = AU_n + C$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer U_1, U_2 et U_3.

b. Déterminer la colonne L telle que $L = AL + C$.

c. On admet que A^n tend vers la matrice nulle. Vers quelles quantités le traitement se stabilise-t-il ?

d. Le médicament est efficace lorsque la quantité dans le sang dépasse 45 mg. Écrire un programme Python qui détermine au bout de combien d'heures ce seuil est atteint, puis donner le résultat.