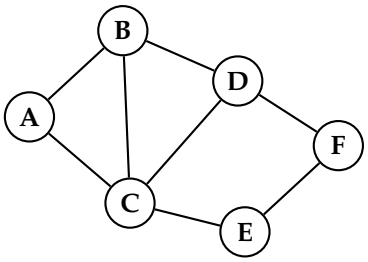
Terminale Maths expertes

Graphes et chaînes de Markov

Devoir surveillé **Durée : 1 heure** **Calculatrice autorisée**

Barème indicatif : Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (5 pts) · Exercice 4 (5 pts).
Les exercices sont indépendants. Dans une matrice de transition, la ligne i donne les probabilités de passer de l'état i aux différents états ; les distributions sont des matrices lignes.

Exercice 1 : Des pistes cyclables (5 points)



Le graphe ci-contre représente les pistes cyclables qui relient six villages A, B, C, D, E et F.

1. Donner l'ordre du graphe, le degré de chaque sommet et le nombre de pistes. Le graphe est-il complet ? connexe ?
2. Un cycliste veut emprunter chaque piste une fois et une seule. Est-ce possible ? Si oui, préciser d'où il doit partir et où il arrivera, et proposer un tel parcours.
3. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe (sommets dans l'ordre alphabétique). On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 4 & 8 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

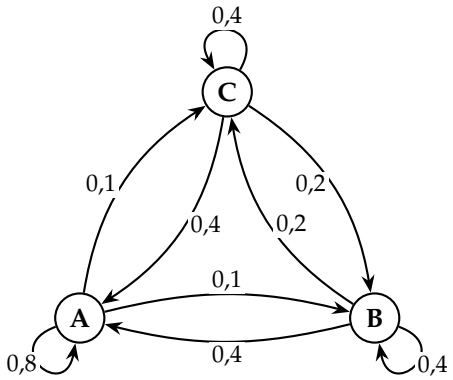
   Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 reliant A à F ? Les écrire.
4. Quel est le nombre minimal de pistes à emprunter pour aller de A à F ? Justifier à l'aide des matrices.

Exercice 2 : Vélo ou voiture (5 points)

Chaque jour, un salarié vient au travail à vélo (état V) ou en voiture (état T). S'il est venu à vélo un jour, il revient à vélo le lendemain avec la probabilité 0,7 ; s'il est venu en voiture, il vient à vélo le lendemain avec la probabilité 0,4. Le lundi (jour 0), il vient à vélo. On note $\pi_n = (p_n \;\; 1 - p_n)$ la distribution du jour n.

1. Représenter la situation par un graphe orienté pondéré et donner la matrice de transition P.
2. Calculer π_1 et π_2. Quelle est la probabilité qu'il vienne à vélo le mercredi ?
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}3\,p_n + 0{,}4$.
4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, puis la limite de la suite (p_n).
5. Vérifier que la distribution obtenue est invariante et interpréter.

Exercice 3 : Trois offres d'énergie (5 points)



Chaque année, les clients d'un fournisseur d'énergie choisissent l'une de trois offres A, B ou C. Le graphe ci-contre donne les probabilités de passer d'une offre à l'autre d'une année sur la suivante.

1. Écrire la matrice de transition P (ordre A, B, C).

2. À l'aide de la calculatrice, calculer P^2. Un client a choisi l'offre A cette année : quelle est la probabilité qu'il ait l'offre B dans deux ans ?

3. Déterminer la distribution invariante π de cette chaîne de Markov.

4. On admet que la suite des distributions converge. Interpréter le résultat pour le fournisseur.

Exercice 4 : Questionnaire à choix multiples (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un graphe a 6 sommets, tous de degré 3. Son nombre d'arêtes est :
a. 18 **b.** 9 **c.** 6 **d.** 3

2. Le graphe complet à 7 sommets a :
a. 42 arêtes **b.** 49 arêtes **c.** 21 arêtes **d.** 14 arêtes

3. A est la matrice d'adjacence d'un graphe et le coefficient d'indice $(2,3)$ de A^4 vaut 5. Cela signifie que :
a. il y a 5 chaînes de longueur 4 allant du sommet 2 au sommet 3
b. il y a 4 chaînes de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3
c. le sommet 2 est de degré 5
d. il faut au minimum 5 arêtes pour aller du sommet 2 au sommet 3

4. Parmi ces matrices, laquelle est une matrice de transition ?
a. $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

5. La distribution invariante de la chaîne de matrice $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ est :
a. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ **d.** $(0{,}9 \;\; 0{,}8)$