Terminale Maths expertes

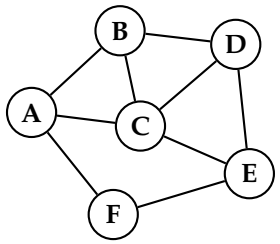
Graphes et chaînes de Markov

Fiche d'exercices

Les exercices sont rangés par difficulté croissante ; la série D rassemble six problèmes tirés de situations concrètes. Le symbole **(calc.)** signale qu'une calculatrice ou un logiciel est utile. Les distributions sont des matrices lignes et, dans une matrice de transition, la ligne i donne les probabilités de passer de l'état i aux différents états.

Série A ⋆ Automatismes

Exercice 1 : vocabulaire ⋆



On considère le graphe H ci-contre.

a. Donner l'ordre de H, le degré de chaque sommet et le nombre d'arêtes.

b. Quels sont les sommets adjacents à C ? H est-il complet ? connexe ?

c. Trouver trois sommets deux à deux adjacents, puis un cycle de longueur 5.

Exercice 2 : somme des degrés ⋆

a. Existe-t-il un graphe à 5 sommets dont les degrés sont 3, 3, 2, 2, 1 ? 4, 4, 3, 3, 2 ? Si oui, en dessiner un.

b. Combien d'arêtes a le graphe complet à 6 sommets ? Combien de sommets a un graphe complet à 66 arêtes ?

c. Un graphe a 8 sommets, tous de degré 3. Combien a-t-il d'arêtes ?

Exercice 3 : matrices d'adjacence ⋆

a. Écrire la matrice d'adjacence du graphe H de l'exercice 1 (ordre A, B, C, D, E, F).

b. Dessiner le graphe non orienté de matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le graphe orienté de matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : chaînes dans un carré ⋆

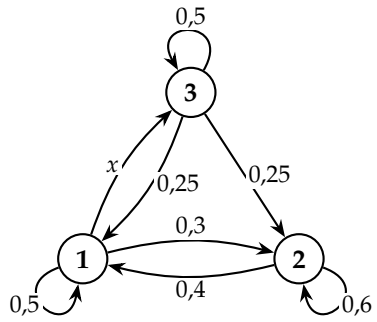
On considère le graphe « carré » de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B, B–C, C–D, D–A.

a. Écrire sa matrice d'adjacence M, puis calculer M^2 et M^3.

b. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 de A à C ? de longueur 3 de A à B ? Les écrire.

c. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 de A à C ? Expliquer ce résultat sans calcul.

Exercice 5 : matrices de transition ⋆



a. Le graphe ci-contre est celui d'une chaîne de Markov. Déterminer x, puis la matrice de transition.

b. Les matrices suivantes sont-elles des matrices de transition ?

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si oui, dessiner le graphe associé.

Exercice 6 : distributions successives ⋆

Une chaîne de Markov à deux états a pour matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ et pour distribution initiale $\pi_0 = (1 \;\; 0)$.

a. Calculer π_1 et π_2.

b. Calculer P^2. Interpréter le coefficient d'indice $(2, 1)$ de P^2.

Exercice 7 : distributions invariantes ⋆

Déterminer la distribution invariante de chacune des matrices suivantes et la vérifier par un calcul :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Pour P_3, interpréter le résultat.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Exercice 8 : chaînes dans un triangle ⋆⋆

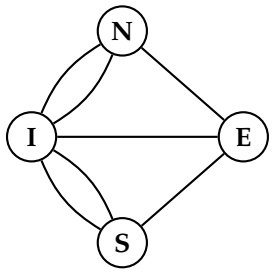
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe complet à 3 sommets et J la matrice d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.

a. Vérifier que $A = J - I_3$, que $J^2 = 3J$, puis calculer A^2 et A^3.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = a_n J + (-1)^n I_3$, avec $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

c. Combien y a-t-il de chaînes fermées de longueur n partant d'un sommet donné ? Vérifier pour $n = 3$.

Exercice 9 : les ponts de Königsberg ⋆⋆



Au XVIII^{e} siècle, la ville de Königsberg comptait sept ponts reliant quatre quartiers : les deux rives N et S, l'île I et le quartier E. On représente chaque quartier par un sommet et chaque pont par une arête.

a. Donner le degré de chaque sommet.

b. Peut-on faire une promenade qui traverse chaque pont une fois et une seule ?

c. On construit un huitième pont entre N et S. Montrer qu'une telle promenade devient possible, préciser ses extrémités et en donner une.

Exercice 10 : connexité et distance ⋆⋆

Soit le graphe de sommets 1, 2, 3, 4, 5 et d'arêtes 1–2, 2–3, 1–3, 4–5, de matrice d'adjacence A.

a. Écrire A et calculer A^2 et A^3.

b. Expliquer pourquoi le coefficient d'indice $(1,4)$ de A^n est nul pour tout $n \geqslant 1$. Le graphe est-il connexe ?

c. On ajoute l'arête 3–4. **(calc.)** Déterminer le plus petit entier n tel que le coefficient $(1,5)$ de la nouvelle matrice élevée à la puissance n soit non nul. Interpréter.

Exercice 11 : une chaîne à deux états, en détail ⋆⋆

Soit une chaîne de Markov de matrice $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, avec $\pi_0 = (1 \;\; 0)$. On note $\pi_n = (p_n \;\; 1 - p_n)$.

a. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}4\, p_n + 0{,}2$.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et la limite de (p_n).

c. À partir de quel rang a-t-on $p_n < 0{,}34$?

Exercice 12 : probabilité d'un trajet ⋆⋆

Une chaîne de Markov à trois états 1, 2, 3 a pour matrice $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. On suppose $X_0 = 1$.

a. Dessiner le graphe pondéré associé.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)$.

c. Calculer $P_{(X_0=1)}(X_2 = 3)$ en décomposant selon la valeur de X_1, puis vérifier avec le coefficient $(1,3)$ de P^2.

Exercice 13 : comportement à long terme ⋆⋆

On reprend la matrice P de l'exercice 12.

a. Déterminer la distribution invariante π en résolvant un système.

b. **(calc.)** Calculer P^{20} (coefficients arrondis à 10^{-3}). Que remarque-t-on ? Interpréter à l'aide du théorème 3 du cours.

Exercice 14 : produit de matrices de transition ⋆⋆

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour trois états).

a. Montrer qu'une matrice carrée P à coefficients positifs est une matrice de transition si, et seulement si, $PU = U$.

b. En déduire que le produit de deux matrices de transition de même ordre est une matrice de transition.

c. En déduire que, pour tout entier n, P^n est une matrice de transition. Était-ce prévisible avec le théorème 3 ?

Série C ⋆⋆⋆ Approfondissement

Exercice 15 : deux sommets de même degré ⋆⋆⋆

On considère un graphe à $n \geqslant 2$ sommets, sans boucle et sans arête multiple.

a. Quelles valeurs peut prendre le degré d'un sommet ?

b. Montrer qu'il ne peut pas y avoir à la fois un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$.

c. En déduire que deux sommets au moins ont le même degré.

d. Application : à une soirée, certains invités se serrent la main. Montrer que deux invités au moins ont serré le même nombre de mains.

Exercice 16 : le modèle d'Ehrenfest ⋆⋆⋆

Deux boules numérotées sont réparties entre deux urnes A et B. Chaque minute, on tire au hasard un numéro (1 ou 2) et on change d'urne la boule correspondante. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A après n minutes ; au départ, les deux boules sont dans A.

a. Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\{0\,;1\,;2\}$ de matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Calculer P^2 et P^3. En déduire P^n selon la parité de $n \geqslant 1$.

c. Déterminer π_n selon la parité de n. La suite (π_n) converge-t-elle ?

d. Déterminer la distribution invariante. Comparer avec $\frac{1}{2}(\pi_n + \pi_{n+1})$ et interpréter.

Exercice 17 : puissances d'une matrice à deux états ⋆⋆⋆

Soit $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a+b < 2$, et $q = 1-a-b$. On pose $B = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

a. Calculer BP et CP.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $P^n = \dfrac{1}{a+b}(B + q^n C)$.

c. En déduire la limite de P^n et retrouver le théorème 4 du cours.

d. Application à la météo du cours ($a = 0{,}2$, $b = 0{,}4$) : un jour de pluie, quelle est la probabilité qu'il fasse sec dix jours plus tard ?

Exercice 18 : marche aléatoire sur un graphe ⋆⋆⋆

Soit un graphe connexe, sans boucle ni arête multiple, à m arêtes, de matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$; on note d_i le degré du sommet i. Un promeneur se déplace de sommet en sommet : à chaque étape, il emprunte une des arêtes issues de sa position, choisie au hasard.

a. Justifier que la probabilité de passer de i à j est $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{d_i}$.

b. Montrer que la distribution π de coefficients $\pi_j = \dfrac{d_j}{2m}$ est invariante. *(On rappelle que $a_{ij} = a_{ji}$.)*

c. Application : donner la distribution invariante de la marche sur le graphe « chemin » 1–2–3, puis sur le graphe G du cours.

Exercice 19 : compter les triangles ⋆⋆⋆

Soit un graphe sans boucle ni arête multiple, de matrice d'adjacence A. On appelle **trace** d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux.

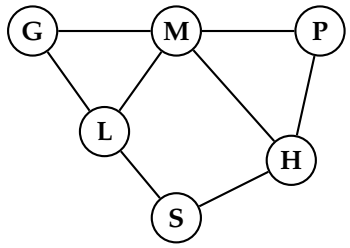
a. Montrer qu'une chaîne fermée de longueur 3 partant de i parcourt un triangle (trois sommets deux à deux adjacents).

b. En déduire que le nombre de triangles du graphe est égal à $\dfrac{\text{trace}(A^3)}{6}$.

c. Vérifier sur le graphe G du cours (utiliser la matrice A^3 de la méthode 2) et sur le graphe complet à 4 sommets.

Série D Problèmes en situation concrète

Exercice 20 : un réseau de métro ⋆⋆



Le plan représente le métro d'une ville : Gare (G), Hôpital (H), Lycée (L), Mairie (M), Port (P) et Stade (S) ; chaque arête est un tronçon entre deux stations.

a. Donner le degré de chaque station. Quelle station est la plus desservie ?

b. Écrire la matrice d'adjacence A (ordre G, H, L, M, P, S).

c. **(calc.)** Combien de trajets de 3 tronçons mènent de G à H ? Les écrire.

d. Quel est le nombre minimal de tronçons pour aller de G à S ? Justifier à l'aide de A et A^2.

e. La station M ferme pour travaux. Le réseau reste-t-il connexe ?

Exercice 21 : la météo à trois états ⋆⋆

Dans une ville, un jour est ensoleillé (S), nuageux (N) ou pluvieux (P). Les observations donnent la matrice de transition (ordre S, N, P) :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

a. Dessiner le graphe pondéré. Lundi est ensoleillé : quelle est la probabilité qu'il pleuve mercredi ?

b. Déterminer la distribution invariante.

c. En admettant que (π_n) converge, combien de jours de pluie peut-on prévoir sur une année ?

Exercice 22 : deux opérateurs téléphoniques ⋆⋆

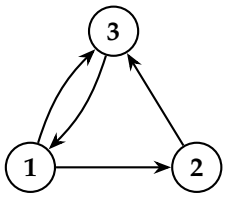
Deux opérateurs A et B se partagent un marché. Chaque année, 85 % des clients de A lui restent fidèles (les autres passent chez B) et 75 % des clients de B lui restent fidèles. En 2026, A détient 60 % du marché.

a. Donner la matrice de transition et la distribution π_1 en 2027.

b. On note p_n la part de A l'année $2026 + n$. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}6\, p_n + 0{,}25$ et en déduire p_n, puis la part de marché de A à long terme.

c. Grâce à une campagne publicitaire, B parvient à garder 90 % de ses clients (A en garde toujours 85 %). Quelle est alors la part de marché de A à long terme ? Commenter.

Exercice 23 : le classement des pages web ⋆⋆⋆



Trois pages web sont reliées par des liens (graphe ci-contre). Un internaute « surfe » au hasard : depuis une page, il suit l'un des liens qui en partent, choisi au hasard. Un moteur de recherche classe les pages selon la proportion du temps passé sur chacune à long terme.

a. Écrire la matrice de transition L de ce surfeur, puis sa distribution invariante.

b. Pour éviter les blocages, le moteur suppose qu'à chaque étape le surfeur suit un lien avec la probabilité 0,85, et sinon va sur l'une des trois pages, choisie au hasard. Justifier que la matrice de transition est $P = 0{,}85\, L + 0{,}05\, J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1, et calculer P.

c. **(calc.)** Déterminer la distribution invariante de P (valeurs arrondies à 10^{-3}) et classer les pages.

Exercice 24 : vélos en libre-service ⋆⋆

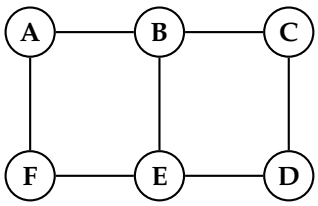
Une ville répartit 300 vélos entre trois stations : gare (G), centre (C) et université (U), avec 100 vélos dans chaque station le matin du jour 0. D'un matin à l'autre, un vélo garé en G se retrouve en G, C ou U avec les probabilités 0,7 ; 0,2 ; 0,1 ; un vélo garé en C, avec 0,1 ; 0,8 ; 0,1 ; un vélo garé en U, avec 0,2 ; 0,2 ; 0,6.

a. Écrire la matrice de transition P et calculer le nombre moyen de vélos dans chaque station le matin du jour 1.

b. Déterminer la distribution invariante. Combien de places faut-il prévoir, au minimum, dans chaque station à long terme ?

c. **(calc.)** Vérifier que P^2 a tous ses coefficients strictement positifs. Que peut-on en conclure ?

Exercice 25 : le circuit de la balayeuse ⋆⋆⋆



Le graphe ci-contre représente les rues d'un quartier ; les sommets sont les carrefours. La balayeuse municipale part du dépôt situé en A, doit nettoyer chaque rue et revenir en A.

a. Donner le degré de chaque carrefour. La balayeuse peut-elle passer une fois et une seule dans chaque rue ?

b. Pour pouvoir revenir en A, elle doit repasser dans certaines rues. Montrer qu'en repassant une seconde fois dans la rue B–E, tous les degrés deviennent pairs, et proposer un circuit.

c. Toutes les rues mesurent 200 m. Quelle distance parcourt-elle ? Pourquoi ne peut-elle pas parcourir une distance plus courte ?